HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（清華大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十三卷第四期目錄 2020 年 12 月）

數學經驗的敘事美學：以歐拉算式 $e^{i\pi}+1=0$ 為例~(二)

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

(續前一期)

三、數學普及書寫中的歐拉算式

在數學圈裡，曾經有過一個純粹好玩的民意調查，徵得一百多位數學家票選出他（她）們心目中最漂亮的數學公式。這個算式何以具有如此魅力呢？或許我們可以徵之於數學普及作家的說法。事實上，在本節中，我們將介紹九位數學普及作家在他們各自的著作中，針對歐拉算式所分享的美學品味。

這九位依序是毛爾（**Eli Maor**）、傑瑞・金（**Jerry King**）、大衛・艾契森（**David Acheson**）、齊斯・德福林（**Keith Devlin**）、威廉・鄧漢（**William Dunham**）、保羅・霍夫曼（**Paul Hoffman**）、亞瑟・班傑明（**Arthur Benjamin**）、永野裕之，以及大栗博司。

1. 毛爾：《毛起來說 *e*》

在本書（英文書名為 ***e: The Story of A Number***）中，毛爾（**Eli Maor**）運用第 **13** 章〈e^{ix}：「最有名的公式」〉來「襯托」*e* 的故事之豐富多元。本章一開始，他就引用卡斯納和紐曼的一段話，當成章前案語，來說明歐拉公式如何有名：

> **歐拉把棣美弗的一項發現，導成一個有名的公式：$e^{i\pi}+1=0$，這可能是所有公式中最精簡又最著名的一個了……不管是神秘主義者、科學家、哲學家和數學家，都對它引起高度的興趣。(頁 214)**

不過，在本章中，毛爾除了指出歐拉的著作《無限分析引論》，是數學史上「第一個點出 *e* 和 e^x 在分析中的核心角色」，從而藉以凸顯歐拉在分析學上的偉大貢獻。歐拉的成就

當然不只此端，我們從他在本章中對於歐拉的生平事蹟之簡介即可得知。事實上，他對歐拉的數學研究之豐富多產的最深刻的比喻，是歐拉 vs. 莫札特的對比：

如果我們把伯努利家族比喻作巴哈家族，那麼歐拉（L. Euler, 1707-1783）無疑是數學界的莫札特，他的豐富成果估計可填滿至少七十冊書，到現在還沒全部出版完。（頁 214）

最後，當然是他對歐拉「算式」的謳歌與禮讚：

如果用「了不起」來形容 $e^{ix}=cosx+isinx$ 與$e^{-ix}=cosx-isinx$二式，我們就得另外找更恰當的詞句來形容$e^{i\pi}=-1$；它在所有數學公式中，鐵定可以列在「最美的公式」行列中。真的不誇張，如果把它改寫成 $e^{i\pi}+1=0$的形式，它就連結了數學中最重要的五個常數（也連結了三個最重要的數學運算 – 加法、乘法及指數運算）。

這五個常數分別代表了古典數學的四支主流：算術可以用 0 和 1 代表；代數用 i 代表；幾何用 π 代表；分析用 e 代表。無怪乎有許多人從歐拉公式中找出各種神秘意義。（頁 227-228）

由於《毛起來說 e》的主題很大一部分與歐拉的貢獻有關，因此，如果讀者有機會閱讀本書，那麼，進入十八世紀西歐的數學脈絡，或許可以更深刻地體會歐拉算式或歐拉公式的「美學」意義。正如同歐拉將「虛」的 i^i 變成為「實」的 $e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$（$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$），[1]毛爾也提點極為「夢幻」的算式或公式變得十分有用之歷史，為數學經驗的美學敘事，平添些許佳話。

針對歐拉對虛數研究的貢獻，毛爾在本書第 14 章中，也給出一個極有洞識的備註，值得我們在此引述：

複變函數論是十九世紀數學的三大成就之一（另兩項是抽象代數及非歐幾何學），這意味著微分學與積分學，已擴大到連當年的牛頓及萊布尼茲都無法想像的領域。歐拉在 1750 年左右做了探路者，之後在十九世紀，經由柯西、黎曼、韋爾斯特拉斯及其他人的貢獻，給了複變函數今天所享有的地位。（頁 254）

2. 傑瑞・金：《社會組也學得好的數學十堂課》

在本書（英文書名為 ***Mathematics in 10 Lessons: The Grand Tour***）第五章中，傑瑞・金（**Jerry King**）介紹實數與虛數的理論發展，最後，他在簡述複變分析（**complex analysis**）的十九世紀發展之後，指出這門學問已經「枝繁葉茂」，且「單憑其本身就夠格成為一門學科」。不過，「古典理論還沒有消逝。〔歐拉〕大師的成果，依然迷醉人心，展

[1] 參考毛爾，《毛起來說 e》，頁 250。

現出深邃、優美的特性。」這顯然是針對歐拉的古典複數理論 -- 尤其是歐拉算式（或方程式）來敘說的，請參看他的「白描」：

我該怎麼談方程式 (e)〔按即 $e^{i\pi}+1=0$〕而不致破壞它的美。就讓我只陳述事實：方程式 (e) 含有：

・數學五個最重要的數：1, 0, e, π 和 i

・最重要的關係：相等

・三種最重要的運算：加、乘和取冪。

此外，方程式 (e) 不含任何與它不相干之物，簡潔得令人屏息，就像弗洛斯特的詩。歐拉見到這則方程式時寫到：「驚人」。…… 當然，方程式 (e) 棲居複變分析範疇，那裡面有許多美的事物棲身。白天，優美在整個數學世界遊蕩。不過每到晚上，它都回家進入複數屋宇休眠。（頁 241-242）

3. 大衛・艾契森：《掉進牛奶裡的 e 和玉米罐頭上的 π》

本書英文原名為 ***1089 and All That: A Journey into Mathematics***。作者大衛・艾契森（**David Acheson**）為應用數學家。本書共有 **16** 章。在第 **1** 章中，作者從數目 **1089** 的驚奇談起，帶領讀者搭上這一趟數學之旅，一同欣賞數學中令人驚奇的定理、美妙的證明，以及偉大的應用。

本書第 **16** 章（亦即最後一章）主題是「實或虛」。作者試圖說明何以歐拉算式 $e^{i\pi}=-1$ 備受數學家寵愛。為此，虛數如何進入歷史舞台，以及歐拉如何在他的（無窮小）分析學教科書中，將虛數與正餘弦函數的冪級數展開式等等連結，而得出同樣精彩的歐拉公式 $e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$。現在，這班數學列車已經抵達終點站了。作者為了呼應他在我們上車前的叮嚀，亦即，讓我們一起欣賞數學中的令人驚奇定理、美妙的證明，以及偉大的應用，於是，他引述歐拉在 **1748** 年如何證明上述等式，藉以演示數學知識的這三個本質面向：

$e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$

出自 1748 年的歐拉的這個了不起的公式，提供了一個適得其所的高點，讓我們圓滿地完結本書。

首先，我們是通過包括微積分、無窮級數和虛數等一堆相當老練的數學想法之連結，而獲得此一成就。

其次，這個公式具有很大的實用價值。真的，實質上任何有關振動的工程或物理書籍都充斥著 e 與 $\sqrt{-1}$，而大大地簡化了許多計算，這就是唯一的理由。

最後，藉由代入特殊值 $\theta=\pi$，並且參考頁 224 的 $sin\ \pi=0$ 和 $cos\ \pi=-1$，我們最終可以獲得 $e^{i\pi}=-1$。（頁 228-229）

最後，他再次強調他在本書中念茲在茲的數學知識之連結（**connection**）：

儘管我們之中的任何人完全有權 – 那是當然！ -- 提出非常不同的意見，這個在 e、i 與 π 之間令人驚奇的結合，就是那麼簡單地，被許多數學家視為整個數學領域迄今 …… 最令人驚嘆的結果。（頁 229）

4. 齊斯・德福林：《數學的語言》

在本書（英文名為 ***The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible***）第三章中，德福林（**Keith Devlin**）介紹了「歐拉公式大驚奇」：

一七四八年，歐拉公式發現了下列令人驚奇的等式：$e^{ix} = cosx + i\ \ sinx$
對任意實數 x 都成立。
這樣一個在三角函數、數學常數 e 以及-1 的平方根（亦即$\sqrt{-1}$）之間的緊密連結，已經足夠令人大感驚異了。誠然，這樣的一個等式不可能只是單純的偶然事件；反倒是，我們必定瞥見了這個大部分引伸在視覺之外的豐富、複雜且高度抽象的數學模式。

德福林進一步指出歐拉公式還有其他庫存的驚奇。也就是，我們還可以得到 $e^{i\pi}+1=0$，如此，「**你將得到一個連結五個常見的數學常數 e, π, i, 0 與 1 的一個簡單方程式。**」還有，這個方程式的「**一個同樣驚人的面向，乃是在一個無理數（此處指 e）上做一個無理虛數的乘冪，結果竟然得出一個自然數。事實上，對虛數做虛數乘冪，也可以得到一個實數答案。**」（**頁 183-184**）

其實，德福林在本書中一直念茲在茲的，莫過於說明：要是我們定義數學為一門研究模式的科學（**a science of pattern**），那麼，掌握模式思考，就必定有助於我們看見不可見的事物（**making the invisible visible**）。當然，這是由於歐拉公式所代表的模式，連結了貌似無關的概念有以致之。而這個有關歐拉公式的插曲，足以見證「複數變成與數學許多部分連結的概念」，此後，誠如德福林所指出，數學家又進一步發現：「在複（變）分析與自然數之間存在了一個既深且廣的連結，這個發現是對數學抽象威力的另一個見證。」而最難以想像的，「複數微積分的技巧幫助了數論家去辨認並描述數目模式，而若無此技巧，它們必定就會永遠地隱藏了。」

5. 威廉・鄧漢：《數學教室 **A to Z**》

在本書（英文名為 ***The Mathematical Universe: An Alphabetical Journey through the Great Proofs, Problems and Personalities***）中，作者威廉・鄧漢（**William Dunham**）提供了二十六個主題（英文字母 **A** 到 **Z**，譬如第 **A** 章主題就是 **"Arithmetic"** 等等），其中有數學家、數學問題、公式及定理證明。[2]這樣的安排，無疑對全書敘事或論述的首尾一貫

[2] 有關本書書評，請參考黃俊瑋 **(2009).**〈《數學教室 **A to Z**》：一數學證明難題&大師背後的故事〉，台灣數學博物館。

及前後呼應，帶來頗大的挑戰。顯然，作者將歐拉算式引進，讓他得以對本書的一些「情節」，進行適當的串連，因此，**0**、**1**、π 、e、i 這五個數全都回到舞台，聯手謝幕：

> $e^{i\pi}+1=0$
>
> **所有數學家很快就能看出這是種絕無僅有的方程式，原來這個式子，把整個數學界最重要的常數，全部串連起來。這裡不只有 0 和 1 擔綱演出，連（第 C 章的）π 、（第 N 章）的 e，還有（第 Z 章的）i，全都回來聯手謝幕。這是貨真價實的群星會陣容。（頁 314）**

按：上述引文中的第 **C** 章主題是「圓」（**circle**）、第 **N** 章「自然對數」（**natural logarithm**），以及第 **Z** 章「複數 **Z**」（$z=x+iy$）。

6. 保羅・霍夫曼：《數字愛人：數學奇才艾迪胥的故事》

本書（英文名為 ***The Man Who Loved Only Numbers***）是數學界傳奇人物保羅・艾迪胥（**Paul Erdos**）的傳記。[3]在本書（第五章）中，作者保羅・霍夫曼（**Paul Hoffman**）特別強調數學知識的連結（**connection**）與數學家的洞察力（**insight**）。其中，有關連結（或聯繫）的部分，他指出：

> **數學就是發現聯繫，尋找特殊問題和一般結果之間、一個概念和另一個貌似無關但實際上相互聯繫的概念之間的關係。任何有意義的數學概念都不是孤立的。（頁 189-190）**

此外，他也以自然對數的基底 e 以及相關的歐拉算式為例，提供一個十分有趣的說明。而這一大段話，後來就成為作家小川洋子在她的經典小說《博士熱愛的算式》中，刻劃數學美的主要參考憑藉。這個算式也可算是該小說的「主角」，因為它，該小說主要角色的破碎人生，終於有了圓滿的連結。

為了在後文與《博士熱愛的算式》（第四節第 **2** 小節）相關情節之呼應，就讓我們引述這段十分精彩的「數學美學」敘事：

> **e 又是甚麼呢？就像 π 一樣，e 也是一個無限非循環小數。歐拉將 e 的值計算到小數點後的第 23 位：2.718281828459045235326028…**
>
> **該數可由下列無窮級數產生：**
>
> $$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{(1\times 2)}+\frac{1}{(1\times 2\times 3)}+\frac{1}{(1\times 2\times 3\times 4)}+\ldots$$
>
> **表面上看來，e 這個數並不怎麼「自然」，其所以有這種叫法，是因為它在諸如生長和衰亡這些基本過程的數學模型中經常出現……**

---

[3] 參考洪宜亭，〈評論《數字愛人：數學奇才艾迪胥的故事》〉，台灣數學博物館。

> **如果數學的成功是用揭示貌似無關的概念之間的深層聯繫來衡量的話，那麼歐拉應該拿頭獎。歐拉注意到 e 的 πi 次方加上 1 等於 0，這樣他大筆一揮就將 π、e、i（虛數，-1 的平方根）和最基本的數字 0 和 1 聯繫在一起，這恐怕是數學中最精煉和最著名的公式了。請注意歐拉公式 $e^{i\pi}+1=0$ 在表現形式上是多麼的美，多麼地簡潔，它不僅充滿了數學的美感，而且還富有神秘的魅力。（頁 191-193）**

7. 亞瑟・班傑明：《數學大觀念》

本書（英文名為 ***The Magic of Math***）第 **10** 章主題就是「$e^{i\pi}+1=0$：i 和 e 的魔術」。作者亞瑟・班傑明（**Arthur Benjamin**）一開始就指出：數學及科學期刊時不時會做意見調查，請讀者選出他們心目中最美麗的公式。排名第一的，當然是 $e^{i\pi}+1=0$。於是，他接著評論說：

> **大家有時候〔將此式〕稱之為「上帝的等式」，因為出現在此是中的或許是數學中最重要的五個數：0 和 1 是算術的基礎；π 是幾何學中最重要的數；e 是微積分中最重要的數；而 i 則可能是代數中最重要的數。更有甚者，這個等式還用上了基礎算術中的加法、乘法以及指數。我們對 0、1 和 π 的意義已經有了一些概念，而本章的目標則是探索無理數 e 以及虛數 i，好讓這個公式最後對我們而言就跟 1+1=2 一樣簡單明瞭（或是說至少跟 $\cos 180^\circ=-1$ 一樣容易）。（頁 302）**

在本章最後一節中，作者將 e^x 的冪級數展開式中的實數 x 以 $i\theta$ 代入，而得到他所謂的「歐拉定理」$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$。（頁 **326**）

另一方面，作者早在第 **8** 章就已經探討 π，該章主題正是「π 的魔術」，至於在第 **11** 章，作者則利用微積分，說明 e^x、$\cos x$ 以及 $\sin x$ 的泰勒展開式之推導過程，於是，第 **10** 章「i 和 e 的魔術」就有了邏輯嚴密的依托。不過，所有這些都意在「**好讓這個公式最後對我們而言就跟 1+1=2 一樣簡單明瞭**」。

8. 永野裕之：《喚醒你與生俱來的數學力》

在本書第 **3** 章中，永野裕之引領讀者「瞭解七個面向，激發內在數學潛能」。這七個面向依序是：整理、順序概念、轉換、抽象化、具體化、逆向思考，以及對數學的美感。針對這第七個面向，他認為「發現並感受『數學之美』，就能在必要時刻反射性的發揮『數學式思考』的力量。」至於具體進路，則是在數學學習時，必須「講求合理性」、「利用對稱性」，並且「追求一致性」，才能培養我們「對數學的美感」之能力。

在「追求一致性」這一小節中，永野裕之邀請讀者欣賞歐拉公式及算式。針對前者，他指出：「這個數學式代表的涵義是：起源完全不同的指數函數（$e^{i\theta}$）和三角函數（$\cos\theta$ 和 $\sin\theta$），在複質數（按：當為複變數）的世界裡存在著密切的關係。」針對後者，他則是指出：「我們可以藉此看出 e（自然對數的底數）、i（虛數單位）、π（圓周

率)、**1**（乘法的單位元）和 **0**（加法的單位元）這幾個非常重要的數之間的關聯，因此也更加凸顯此公式的重要……。對於學習數學的人來說，此公式之所以顯得如此美麗，原因不僅是因為它可以應用的範圍很廣，也因為它是一個結合了不同概念且形式非常簡單的數學式。」

最後，永野裕之在總結本章時，先強調科學家與數學家所謂宇宙真理的美，就如同歐拉公式的美一樣，「指的就是單純的一致性。」其次，他將這種美感經驗連結到「看穿事物本質」的數學精神上，[4]提醒讀者：

> **當你認為自己發現了「本質」，但想確認它是不是真正的本質時，請檢視該本質是否可以用來統一說明大部分的情況。如果它只適用於特定情況，那肯定不是真正的本質。……想要統一說明、甚至想讓說明愈簡單愈好的慾望，是非常數學式的一種思維。而我認為人類的歷史已經為我們證明，這樣的思維正是帶領我們看穿事物本質的最佳功臣。（頁 244）**

9. 大栗博司：《用數學的語言看世界》

在本書（共有九話）第八話（主題：真實存在的「幻想的數」）一開始，作者就指出：

> **下面這個就是出現虛數的知名方程式之一：**
> $e^{i\pi}+1=0$
> **納皮爾數 e、圓周率 π、無論乘上任何數都依然是數本身且被稱為「乘法單位」的 1、無論加上任何數都依然是數本身且被稱為「加法單位」的 0 以及這一話的主角「虛數單位」，全都聚集在一個方程式裡了。小川洋子的《博士熱愛的算式》中，化解未亡人與看護者心中殘留的遺憾的，就是這項被寫在博士的筆記紙上的公式。這一話（按即：本書第八話）的後半，會說明關於這個算式成立的理由及其所代表的意義。（頁 208）**

然後，在本話結束時，作者進一步指出：歐拉所以發現這個公式，是萊布尼茲與約翰・白努利（歐拉的老師）之間，[5]有關對數函數 $\boldsymbol{log_e(-1)}$ 的爭議所引起。不過，他們兩人都錯了，正確的答案是歐拉利用等式 $e^{i\pi}=-1$，而推得 $\boldsymbol{log_e(-1)=\pi i}$，如再考慮週期性，則一般答案為 $\boldsymbol{(2n+1)\pi i}$。最後，歐拉寫下：「這些困難已經完全解除，對數的理論已經完全能夠防守全部的攻擊。」

基於本話的論述，作者追溯數學概念的歷史源頭，說明貌似無關事物之間的連結之意義，非常發人深省：

---

[4] 本書第 **3** 章第 **4** 小節主題，即是「以抽象化看穿事物的本質，從而將複雜現實簡化成單純模式」，頁 **148-171**。

[5] 在《毛起來說 **e**》中，**Bernoulli** 中譯為「伯努利」。

> **當數學愈來愈發達，就會發現，以前覺得毫不相關的事物之間，居然有意料之外的關聯性。三角函數誕生於從古希臘時代就開始研究的平面幾何。而指數函數是由布拉赫的天文學所觸發、納皮爾為了要簡化天文數字的計算開發的。從出生到成長、完全不相關的兩個函數，卻在「幻想的數」也就是複數的世界裡深刻地相連在一起。（頁 234-235）**

還有，他還提及數學概念的自主性與近似柏拉圖主義的觀點：三角函數與指數函數，「與其說是人類所創造出的物品，不如說是像歐拉那樣的探險家，發現了在數學的世界中早已存在的事物。複數本來是人類幻想出來的數，但是在擺脫了人類所居住的現實世界獨自發展出的數學世界中，複數卻是確實存在的數。」

在上述九則引文中，毛爾（第 **1** 小節）、大衛・艾契森（第 **3** 小節）、齊斯・德福林（第 **4** 小節）、亞瑟・班傑明（第 **7** 小節）、永野裕之（第 **8** 小節）以及大栗・博司（第 **9** 小節）都強調了歐拉算式 $e^{i\pi}+1=0$ 的「內部連結」、它與歐拉公式 $\boldsymbol{e^{ix} = cosx + i\ sinx}$ 的「外部連結」，乃至於後者如何有助於建立指數函數與正餘弦函數之連結，正如歐拉所見證：「**怎樣能把虛指數量化為實弧的正弦和餘弦。**」（參見本文第五節）

另一方面，傑瑞・金（第 **2** 小節）與威廉・鄧漢（第 **5** 小節）則只提及歐拉算式的數目（的內部）連結（比如「聯手謝幕」之比喻），而未連結到歐拉公式，使得敘事難以充分發揮。不過，這與作者所選擇的主題與材料有關，他們無法面面俱到，或許也顧及設想讀者群的閱讀興趣。

至於保羅・霍夫曼（第 **6** 小節）雖然未提及歐拉公式，但是，他在上引文字所在的章節中，不斷強調數學家的洞察力與數學概念的深層連結，這些情節的適當烘托，使得他在分享歐拉算式（或他所稱的公式）的美感經驗時，顯得頗為順理成章。無怪乎小川洋子閱讀此書（《數字愛人》）時，備受感動與啟發。請參見本文第四節第 **1** 小節。

(未完待續)

對數教學的 4.5 節課—108 課綱高一對數教學的反思與建議

台南一中
林倉億

一、 玩笑話—智商取 log

這幾年只要進入對數單元的教學，筆者都會開玩笑地說：「遇到 **log**，學生的智商就取 **log**！」這雖然只是一句過度誇張的玩笑話，但常常會引起同仁共鳴的會心一笑，反映出對數是學生不易學習的單元。筆者也不斷地思考、調整教學方式，希望能幫助學生學好對數，只是效果都不如預期，所以這句玩笑話也就一直掛在嘴邊。直到今年上完高一對數單元後，學生的反應開始讓筆者覺得有點不同了。

二、 108 課綱的新契機

在 **108** 課綱之前的課程規劃，課本在引入對數之後、學生還沒內化對數概念之前，就要緊接著介紹對數律（含換底公式）對數函數、首尾數等概念，學生必須在短暫的時間內（**3~4** 個星期）學會、熟悉上述這些內容，平心而論，對師生來說都是一大挑戰。

108 課綱，高一學生學習對數的內容大幅減少，教育部 **107** 年 **12** 月公布的《十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程手冊》（以下簡稱《數學領域課程手冊》）：

> **N-10-4　常用對數：log 的意義，常用對數與科學記號連結，使用計算機的 10^x 鍵和 log 鍵。**
>
> **備註：透過操作而加強認識任意正數 a 皆可以改寫成 $10^{\log a}$。不談其他底的對數。**

其中「**透過操作而加強認識任意正數 a 皆可以改寫成 $10^{\log a}$**」，增強了筆者以往的教學信念，經去年的實驗調整後，今年的教學，刻意在這關鍵一步上加強，的確得到很不錯的效果。

以往課本在引入對數時，採取的是方程式的觀點：「$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$」（$a > 0$，$a \neq 1$ 且 $b > 0$），這對學生來說，其實是好幾個符號與步驟。比方說，在「$2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$」中，學生看 2^x、x、$\log_2 3$ 都是符號，而要理解 $\log_2 3$ 則必須先把它令為 x，再轉換成 $2^x = 3$，然而，很多學生就停在這裡，無法直接連結到 $2^{\log_2 3} = 3$。筆者初任高中數學教師時，完全沒有意識到有許多學生無法從「$2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$」直接連結到「$2^{\log_2 3} = 3$」，還嘲笑坊間許多補習班講義竟然把 $a^{\log_a b} = b$ 列成一個運算公式或性質，直到筆者親眼見到許多學生是用記憶的方式來背誦 $a^{\log_a b} = b$，完全沒有連結到對數

的定義，才警覺到原來從「$2^x=3 \Leftrightarrow x=\log_2 3$」到「$2^{\log_2 3}=3$ 」，對很多學生來說一點都不容易！

再舉一個應該不少高中數學老師都曾遇過的例子，有些學生會把$\log 2$看成是「$\log\cdot 2$」中間的乘號「$\cdot$」略去不寫，所以他（她）對算式「$10^x=3 \Rightarrow \log 10^x=\log 3$」的理解不是兩邊「同取」**log**，而是兩邊「同乘以」**log**。追究下去，會發現根源在於學生無法把$\log_2 3$或$\log 2$看成一個數，或者更明白地說，$\log_2 3$或$\log 2$對這些學生來說，好比是多項式或方程式中的x，是文字符號，而不是一個數、不是一個常數。

雖然筆者在 **108** 課綱之前的對數教學，一直強化定義$2^{\log_2 3}=3$與$\log_2 3$是一個數，不斷跟學生強調「對數其實就是指數」，但一直覺得效果十分有限，原因或許是如同前面所提的，學生不易在短暫時間內消化這麼多的對數內容。筆者經過去年教 **108** 課綱高一教材的實驗與調整後，今年採用的教學策略就是把學生在國中學習$\sqrt{2}$的經驗，連結到$\log 2$的學習。

三、 第 1 節課：$\log 2$ 是有理數還是無理數？

108 課綱十分強調電子計算機的引入，筆者今年所採用的南一版課本在引入$\log 2$時，除了利用計算機讓學生直接按出$\log 2$的近似值外，也包含利用計算機做十分逼近法來逼近$\log 2$的近似值。這樣的方式，筆者很認同，課堂上也會請學生拿出手機，利用手機內建的計算機功能求得$10^{0.301} \doteq 1.9999 < 2 = 10^a < 10^{0.302} \doteq 2.0045$，然後說 **2** 比較接近$10^{0.301}$，所以$a$比較接近 **0.301**，故用 **0.301** 作為a也就是$\log 2$的近似值。雖然課本指出可以重複使用計算機與十分逼近法來找到越來越接近$\log 2$的近似值，但很可惜的，就只有這樣！

都已經花時間帶領學生利用計算機求出$\log 2$的近似值 **0.301**，筆者可不願就此「善罷甘休」，要學生再繼續重複步驟逼近$\log 2$的近似值，直到學生有點厭煩了（其實只多逼近一位就有學生對這重複動作感到厭煩），筆者就丟出最喜歡問學生的問題：「**你們現在可以問什麼問題？**」學生陷入一片沉默，沒有人提出問題，然後筆者就要學生再逼近$\log 2$的近似值到下一位數，馬上就有學生提出一些問題，想要終止這重複逼近的動作，只可惜都不是筆者要的問題，所以，學生們只好無奈地繼續逼近$\log 2$的近似值。

終於，有學生受不了了，開始問說：「**要做到什麼時候？**」，甚至有學生會說：「**做不完啦！**」筆者除了稱讚他們問了好問題外，也提醒他們：「**我們已經求出小數點後好多位了，這時候我們應該問什麼問題？想想看我們在 1-1 學到什麼東西是跟小數點後位數有關**

的？」一陣七嘴八舌之後，有學生開始講到這樣下去會得到有限小數、循環小數、無限不循環小數之類的，然後甲學生斬釘截鐵地說：「**無限不循環小數。**」筆者問他為什麼？他害羞地說補習班老師說 $\log 2$ 是無理數，所以會是無限不循環小數。學生知道無理數是無限不循環小數就值得鼓勵，所以筆者口頭嘉獎甲學生之後繼續追問：「**你怎麼確定補習班老師說的是正確的？**」甲學生就陷入沉思。筆者轉而問全班：「**先不管這位同學說的正確與否，憑你的直覺、感覺，你覺得繼續逼近下去，會不會在某一位數就停止了？還是會不斷地做下去，得到無限多位小數？**」

原本以為全班同學會受到甲同學回答的影響，認為這逼近過程可以無限做下去，沒想到有近 $\frac{1}{3}$ 同學表示這過程應該在小數點後某一位就會停止了。筆者問其中一位乙同學，他表示「**<u>（近似值）會越來越接近，應該在某一位小數就可以得到真正的值了。</u>**」接著筆者鼓勵乙同學及全班其他同學，試著證明自己的猜測是正確的。一陣沉默夾雜著窸窸窣窣的討論聲之後，乙同學舉手說：「**可以用反證法，假設它 ($\log 2$)是無理數。**」

「反證法」三個字引起了同學的騷動，雖然乙同學不知道接下來該如何證明下去，但另一位丙同學舉手表示：「**用反證法假設它 ($\log 2$)是有理數 $\frac{n}{m}$**」，筆者把丙同學說的寫在黑板上，丙同學繼續說：「$10^{\frac{n}{m}}=2$，$10^n=2^m$，**……**」後面筆者就聽不清楚丙同學說什麼了，因為很多同學已經看出來接下來會得到矛盾的結果，全班嘰哩呱啦的討論聲、歡呼聲與擊掌聲淹沒了丙同學的聲音，筆者只好默默轉身把剩下的過程寫在黑板上。該節課時間也差不多要結束了，筆者簡單做個總結後，要學生回去想想「**國中是怎麼學 $\sqrt{2}$ 的？$\log 2$ 與 $\sqrt{2}$ 有什麼相同之處？**」

另外，筆者在這節課還會埋個梗，問問學生在沒有電子計算機的情況下，要如何求出 $\log 2$ 的近似值？至於答案，筆者在段考前的數學課才會告訴他們。

四、 第 2 節課：從 $\sqrt{2}$ 到 $\log 2$ —兩者有何相同之處？

接下來的一節課，筆者就從「**國中是怎麼學 $\sqrt{2}$ 的？**」、「**$\sqrt{2}$ 是什麼？**」這兩個問題問學生。不少學生已經忘記自己是怎麼學會 $\sqrt{2}$ 的，但知道 $\sqrt{2}$ 的平方會是 **2**。為節省上課時間，筆者幫學生整理，國中是從正方形面積出發，面積為 **2** 的正方形其邊長為 $\sqrt{2}$，這個數國中直接說它是無理數，高中 **1-1** 課程我們才證明它是無理數，用的就是反證法。筆

者提醒學生，雖然忘記$\sqrt{2}$是怎麼學來的，但都記得它是一個數，一個平方之後等於 **2** 的無理數；同樣地，$\log 2$ 也是一個數，一個「丟」到 **10** 的指數後會得到 **2** 的無理數。兩者都是無理數，不同的運算方式後，可以得到相同的 **2**。

強化$\log 2$是一個數的概念後，筆者引導學生，國中學了根號之後，任何一個已知面積的正方形，其邊長都可以用根號表示出來，那學了 **log** 之後呢？我們可以用 **10** 來「一統江湖」，任何一個正數都可以用 **10** 的次方表示出來！接下來就是在黑板上多寫幾個正數，要學生把這些正數表示成 **10** 的次方，例如$2=10^{\log 2}$、$3=10^{\log 3}$、$100=10^{\log 100}$、$\frac{5}{4}=10^{\log\frac{5}{4}}$、$\sqrt{10}=10^{\log\sqrt{10}}$、$\pi=10^{\log\pi}$**……**等。這過程再簡單不過了，學生們很快就掌握住了，筆者只是不斷地提醒$\log 2$、$\log 3$、$\log 100$、$\log\frac{5}{4}$、$\log\sqrt{10}$、$\log\pi$**……**都代表某一個數，某一個無理數或有理數。至此，就完成了《數學領域課程手冊》中的「**透過操作而加強認識任意正數**a**皆可以改寫成**$10^{\log a}$**。不談其他底的對數。**」該節課剩下的時間，就是教完課本上的例題。

五、 第 3 節課：對數運算規則的引入

在（多數）學生接受$\log 2$是一個數後，筆者開始引入對數的運算規則：「$a,b>0$：$\log ab=\log a+\log b$、$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$、$\log a^b=b\log a$」。對數律在 **108** 課綱是放在第三冊，但敝校數學老師們評估我們的學生應該可以接受以 **10** 為底的對數運算規則（不含換底公式），故敝校高一學生從 **108** 課綱第一年開始就學習上述 **3** 個對數運算規則。第一年實施後，發現絕大多數學生都可以順利使用上述運算規則，所以，今年也就比照辦理。由於上述 **3** 個對數運算規則是高一的課外補充（雖然列入段考範圍），筆者並未在課堂上正式證明，只在黑板上寫出下列左方的式子，要求學生寫出右方的表示法：

$$2\times 3=6 \ \Rightarrow\ 10^{\log 2}\times 10^{\log 3}=10^{\log 6}$$
$$6\div 2=3 \ \Rightarrow\ 10^{\log 6}\div 10^{\log 2}=10^{\log 3}$$
$$2\times 2\times 2=2^3 \ \Rightarrow\ 10^{\log 2}\times 10^{\log 2}\times 10^{\log 2}=10^{\log 2^3}$$

學生們很容易就觀察到$\log 6=\log(2\times 3)=\log 2+\log 3$、$\log 3=\log\frac{6}{2}=\log 6-\log 2$、$\log 2^3=3\log 2$，接著筆者就引出$a,b>0$：$\log ab=\log a+\log b$、$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$、$\log a^b=b\log a$，並要學生利用課後時間自行證明這 **3** 個對數運算規則。這節課剩餘的時間，就是利用題目演示這 **3** 個對數運算規則，讓學生們熟悉、熟練它們。筆者深知有學生無法在這麼短時間內接受這 **3** 個抽象的運算規則，所以，縱使有學生很快地算出答

案，筆者還是慢慢地講解、演示，清楚地說明每一個步驟是用了哪一個對數運算規則。

附帶一提的，敝校這次的高一第一次段考試題中的證明題，就要學生證明「$r,s>0$，$\log rs=\log r+\log s$。」筆者看到題目時的第一個想法是：「**慘了！沒正式證明給學生看，也沒盯學生是否有回家自行證明，這下學生一定亂寫一通了！**」沒想到筆者的學生寫得還不錯，出乎筆者的意料，全班 **37** 位學生有 **21** 位學生成功證明它，而只有 **7** 位學生這題一分未得。而成功證明此運算規則的 **21** 位同學，絕大多數是依筆者在課堂上引入此規則的方式，顯見這樣的教學方式的確為學生所接受。

六、 第 4 節課：從 $\sqrt{2}$ 到 $\log 2$ 一兩者的運算有何不同之處？

雖然學生在第 **3** 節課學習了對數的運算規則，但依筆者的經驗，很多學生仍然會覺得這樣的運算規則很「怪」，雖然知道規則何以為對，但使用起來心裡總有一些芥蒂，甚至不願意積極熟練對數的運算規則。因此，筆者在這一節課一開始就在黑板上寫下「$\sqrt{2}$ **vs.** $\log 2$」，然後逐步完成下表：

$\sqrt{2}$ **vs.** $\log 2$	
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$\log 2+\log 3=\log 6$
$\sqrt{2}-\sqrt{3}$	$\log 2-\log 3=\log\frac{2}{3}$
$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$	$\log 2\times\log 3$
$\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\log 2\div\log 3$
$\sqrt{2^3}=\sqrt{2}^3$	$\log 2^3=3\log 2$

透過這個表格，學生很容易感覺到對數的運算規則與根號的運算規則，似乎「很像」，只不過是「相反的」味道（根號是加減不能合併、乘除可以合併，對數剛好反過來）。

當學生開始接受對數的運算規則「沒那麼怪」後，筆者就再問學生問題：「**有誰可以跟我說國中的時候是怎麼說明** $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ **？不用證明，說明即可。**」頓時，全班陷入一片沉默，然後有人說：「**指數律吧？**$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}=(2\times3)^{\frac{1}{2}}=6^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$ **。**」筆者笑著回答：「**如果國中就已經學完分數指數和它的指數律，那我在教它的時候怎麼都沒有人跟我說國中已經教過了？**」學生們開始竊竊私語，從台上看下去，一群學生邊討論邊露出「黑人問號」的表情，完全想不出來以前是怎麼理解 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ ，但確定國中的時候一定有學過一套說明（或證明）來解釋為什麼 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ 。筆者重點不在於為什麼

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$，因此要學生們回家找找國中的教材，或者回國中母校探望數學老師順道問問為什麼。筆者跟學生強調：

> **雖然都學過根號運算規則背後的道理，但使用的時候，根本不會去想為什麼，就那麼自然而然地用出來了，一點也不覺得奇怪；初學的時候應該會覺得怪，但現在不會有人覺得根號的運算規則是奇怪的。同樣地，初學對數運算規則時也是這樣，或許會覺得怪，但多用、熟練後，就不覺得怪了。不過，對數運算規則何以為對的原因，要會自己說明。**

筆者沒有研究證據證明學生在經過根號與對數運算規則的比較之後，對於對數運算規則的接受程度是否有明顯地提升，但從後續的課堂反應觀察中，發現大多數的學生對於對數運算規則的使用少了遲疑，多了「勇往直前」的膽識。

這節課筆者還引入了首、尾數與科學記號的連結（例如求 2^{100} 的位數與最高位數字），並建議學生將 $\log 2$、$\log 3$、$\log 7$ 的近似值記下來，並帶學生把 $\log 4$、$\log 5$、$\log 6$、$\log 8$、$\log 9$ 的近似值算出來。這樣的教學方式雖然（或許）不符合現行課綱的精神，但筆者認為學生如果多知道這幾個近似值，更能將對數當成一個數來看待，也可以在不藉助計算機的情況下，粗略估計某些對數之值。筆者相信，能粗略估計是很重要的，比方說 $\sqrt{66}$，當然是一個數，但知道 $\sqrt{66}$ 是 **8.…**，更有「數的感覺」。當然啦，$\sqrt{2020}$ 還是要藉助計算機才能比較快知道是 **44.…**。

筆者在建議學生記下 $\log 2$、$\log 3$、$\log 7$ 的近似值時總會強調，不記也無妨，考試會給，更何況的確有許多國家的學生是不用記的，然後跟學生分享筆者 **2012** 年的親身體驗。**2012** 年筆者有幸前往韓國參加「**HPM2012**」研討會，並以高中教師的身分跟與會的學者分享在高中數學課堂上引入數學史的教學經驗。在分享的過程中，筆者提到台灣的高中數學教師會建議（或要求）學生記下 $\log 2$ 的近似值為 **0.301**，當場有許多的歐美學者提出質疑，完全不明瞭用計算機就可以按出 $\log 2$ 的近似值到小數點後好多位，為什麼台灣高中數學教師還要學生記下 **0.301** 這個值？老實說，以前的高中數學課堂上並不像 **108** 課綱這樣強調計算機的引入，筆者當時也沒想過這個問題（反正題目都這樣出、這樣考，學生不但要知道近似值，還要會查對數表），當下不但無法回答歐美學者的疑問，甚至覺得台灣高中數學教育好像是「落後的」、「少數的」。沒想到，筆者分享完後的休息時間，印度學者主動來向筆者表示，印度的高中生也需要記 **0.301** 這個近似值，筆者當下的感覺就是得到了 **10** 億人口的奧援；沒多久，中國大陸與會的高中老師也跟筆者說，他們也要求學生記這個近似值。這下不得了了，**10** 億加上 **12** 億，幾乎全球一半的人口了，筆者再也不覺得自己是「少數了」。講完這個例子，學生都會哈哈大笑，筆者就請學生自行「選邊」，完全不強迫。（當日後來有些日、韓的學者和高中老師也向筆者表示，在他們國家也會有老師建議學生記 **0.301**，但不是強迫性的。）

七、 段考前的半節課：以前的數學家怎麼算出$\sqrt{2}$的近似值？

按計算機得到$\log 2$的近似值的確是十分簡便，但不免有學生會好奇，以前的數學家是怎麼求出$\log 2$的近似值？筆者常問學生一個問題：「**愛因斯坦有按過（電子）計算機嗎？**」反應直接一點的學生會脫口說：「**有吧！**」然後懷疑自己的答案；許多學生會露出狐疑的表情，內心的小劇場就是「**難道愛因斯坦沒按過（電子）計算機？**」愛因斯坦生前當然有一些計算器，但絕對沒有今日的電子計算機或電腦，因此，絕對不可能按計算機得到$\log 2$的近似值。雖然沒有今日的電子計算機，但早在 **1624** 年布里格斯 **(Henry Briggs, 1561~1630)**出版的《對數算術》**(*Arithmetica Logarithmica*)**中，就已用一種既獨特又深具創意的方法求得準確到小數點後第 **14** 位的$\log 2$近似值（參見筆者拙作〈怎麼算 **log2**？〉)。

除了布里格斯之外，歐拉 **(Leonhard Euler, 1707~1783)**在其著作《無限解析入門》**(*Introductio in analysin infinitorum*)**中也提出一種求$\log 5$近似值的方法（參見筆者拙作〈怎麼算 **log2**？〉)，這兩種方法筆者以前在任教的班級都介紹過，學生對歐拉方法的接受度較高，因此，筆者就決定利用段考前的半節課介紹歐拉的方法，並要求有參與筆者帶領的「數學週記」活動的學生，用歐拉的方法求出$\log(10+n)$的近似值，其中n為學生的座號；學生完成後還要寫簡短的評論，連同求近似值的過程在段考完後繳交（參見附錄)。段考完後收到學生繳交的數學週記，果真如筆者所預期，學生們不僅能掌握歐拉的方法求出指定對數的近似值，還能評論此方法的優缺點，以下是 **4** 位學生的評論：

> **我認為歐拉的這種方法優點在於這種方法有點類似於之前學過的十分逼近法，只是這次逼近的是 log，非常的簡單易懂，對於剛認識 log 的初學者來說是最容易理解的，你也不用花太多的時間去適應這種新東西，而且此種方法只要你有耐心，一定能求到非常準確的 log 近似值，缺點就是此種方式以現代來看既費時又費力，而且算久了會不知道自己在算甚麼。**

> **歐拉求近似值的方式，讓我聯想到國中時以十分逼近法求根號近似值的情景。但兩者不同的是，十分逼近法必須一直平方，而歐拉求對數近似值時，卻是一直開根號，兩者有著異曲同工之妙，不知道是誰參考了誰的想法?**

> **以前沒有計算機的年代，要用出這麼大的表格想必一定要花很久，讓我深感古人的毅力和能力啊！也對於能想出這種寫法的歐拉深感佩服，擁有和白居易老嫗能解一樣的精神，將繁複東西變得使人淺顯易懂真是不簡單呢!!**

> **評論:凡事都有優缺，俗話說:「美玉微瑕，未為至寶」。**
> **此方法也不例外，但是褒大於貶，我認為此方法就只有在計算方面麻煩了點—開根號求近似值。……優點，這個方法非常適合拿來當作課堂上的額外補充，拿來當作數學實作，讓同學們自由討論，並體驗以前沒有計算機的年代。知道這方法，就不再像以前死板的把 log2≒0.3010 記下來，而是知道了其中的原理，歐拉的方法只是**

> **其中的一種，另外還有布里格斯的方法，或是利用微積分。歐拉的方法相對好理解。**

還有學生想到或許可以利用不久前學過的分點公式來提高歐拉方法的「效率」，也有不少學生也提到了開根號取值時可能產生的誤差問題，筆者節錄 **4** 位學生的文字如下：

> **正因為高一剛好學過分點公式，我就在想如果逼近法配合分點公式，會不會比較有效率？但是如果分點公式運算在 log 裡呢？由於分點公式是以線段比例來算出取值，而 log 的圖形並不是一直線，並且分點公式也無法套入根號運作。後來發現“內插法”剛好可以用在 log 上，而且也能配合開幾次方就可以剛好配合 log 的運算原理直接轉為分數運算，但是每兩個數的乘完後開方就會變成幾次方相乘後再開兩個數的次方相加的根次，因為是非常繁複的運算，在過去幾乎很難完成，現在有電腦輔助運算，可能只要 6 次後就可以得到我們想要的 log 值了。**

> **不過無論是布里格斯的方法還是歐拉的方法，都會有誤差的問題，誤差的大小差異而已，布里格斯的方法的誤差值在於，無論如何都會存在一個非常接近 0 的 log 值，而歐拉的方法的誤差在於，無論取多少位的小數，在開根號的時候本就會有一定的誤差值(因為根號本就是無理數，未被取到的小數位即是誤差值)，且大部分的計算機，我所見過取的最精確的也只到小數後第 32 位，誤差值算是還蠻大的，這個時候採用布里格斯的方法誤差值相對來說變小了許多。**

> **我個人認為歐拉的方法很好，他利用找近似值的方式，慢慢推導出 log2，但是這個方法有幾個缺點，第一個缺點就是因為它是取近似值的關係，所以如果寫得太長的話，誤差值會慢慢變大，而且我們又只有取到小數點後六位，所以誤差值就會非常的明顯，進而導致最後算出的答案並不一定是確切的答案…。**

> **我認為其所存在的一些小毛病則是"誤差”，就算根號的值算到再怎麼精細，其中就是存在著誤差的，因為我們已經知道在所有根號(平方根)的值中，除了完全平方數的根號值以外，其他的都是無理數，也就是無限不循環小數，但我們在計算時總不可能真的取無限多位吧，就連傳統計算機都有位數限制了，生活在當時的歐拉必定也是如此，因此，那些被省略的小數點後好幾位的數，以及經過重複運算後，變成了誤差的來源。**

雖然筆者鼓勵這些學生繼續深入探究如何改良歐拉的方法，或評估略去的小數點第 **7** 位以後的數字對真正值的影響，並期待學生們將進一步的研究結果寫成小論文。很可惜的，到目前為止學生們仍然沒有下文。

八、 反思與建議

108 課綱之前的教材安排，在引入對數之後，接著是含換底公式的對數律，在許多學

生尚未內化對數概念及熟悉運算規則之前、在許多學生還停留在把 $\log 2$ 看成一個文字符號而不是將它視為一個數之前，課程就要將對數從數提升到函數，學習對數函數及其圖形；不只如此，最後還有對數表及對數的應用。這樣的課程安排對學生而言，要學習的全新概念太多，知識「密度」過高，造成許多學生的學習成效不佳，無怪乎筆者會說出「**遇到 log，學生的智商就取 log！**」這樣的玩笑話。縱使筆者以往在教授對數時，會花時間幫學生建立 $\log 2$ 是個數、是個無理數、是讓 $10^{\log 2}=2$ 的無理數，礙於課程內容的緊湊安排，總覺得學生的學習效果不如預期。

如今的 **108** 課綱強調「**透過操作而加強認識任意正數** a **皆可以改寫成** $10^{\log a}$ **。不談其他底的對數。**」對筆者來說，有了充分的時間引導學生認識、探索並內化對數概念，幫助學生克服新符號的學習與認知障礙。從去年第一次教授 **108** 課綱對數課程的試驗，到今年調整後的實施結果與學生的學習反應、成效（主要是平時考與段考的紙筆測驗成績與上課學生的回答），雖然仍有不少改進的空間（比方說來年再教到這一單元，筆者會略去首數、尾數），但筆者對於這樣的課程安排（含對數運算規則）是滿意的。因此，也提出幾點建議給老師們作為參考。

第一，**108** 課綱大量在課程中引入計算機，本意是好的，但對於對數概念的學習，只能說「水能載舟，亦能覆舟」。去年筆者的同事依課本的編排，透過計算機讓學生學習對數概念，但到了單元快要結束的時候，發現有位認真學習且數學學習狀況良好的學生，認為 **6** 只是 $10^{\log 6}$ 的近似值！筆者同事深覺事態嚴重，仔細了解之後才知道，學生總在計算機上按出 $\log 6$ 的近似值 0.77815125 ，造成了學生誤以為 $\log 6$ 只是個近似值，不是個定值，因此 **10** 的某個近似值次方得到 **6**，**6** 當然也只是個近似值而已！學生這樣的錯誤認知，就好像當學生不把 $0.\overline{9}$ 看成一個定值而是看一個變動的數的時候，那他（她）就會認為 **1** 只是 $0.\overline{9}$ 的近似值。

利用計算機確實可以省去繁雜的計算過程，讓學生很快得到 $\log 2$ （或 $\log 6$ ）的近似值，但計算機不能幫助學生建立 $\log 2$ 是個定值的概念。就工具論的立場，能知道、能用計算機按出 $\log 2$ 的近似值是 0.301029995，在實際應用上已經足夠了，但在數學概念的學習上，是不完整的，甚至可能是「錯誤的」！比方說筆者「第 **1** 節課： $\log 2$ 是有理數還是無理數？」中提到的乙學生，他依照課本的安排，努力用計算機做十分逼近法求 $\log 2$ 的近似值，這整個過程讓他相信只要做到小數點後某一位數就可以得到 $\log 2$ 真正的值，而且他還打算利用反證法證明「 $\log 2$ 是有理數」！其實我們都知道，計算機上只有有限小數，沒有無理數，因此，光依賴計算機，是無法讓學生真正完整學習到 $\log 2$ 。好在讓學生知道 $\log 2$ 是無理數（不是有理數）並不難，只要在課堂上多花點時間引導，搭配學生剛學過的反證法，學生就可以利用高中學習到的知識與方法，「發現」原來 $\log 2$ 是無理數（不是有理數）。

第二，**108** 課綱在高一課程並未引入對數律，也就是學生只學到了 $\log 2$ 、 $\log 3$ ，但不知道它們兩個可以運算。計算機當然可以按出 $\log 2+\log 3$ 、 $\log 2-\log 3$ 、 $\log 2\times\log 3$ 、 $\log 2\div\log 3$ ，但對學生而言，那是計算機算的，不是學生自己算的！另外，若不透過計算機，學生根本無從知道 $\log 2$ 、 $\log 3$ 的近似值是多少！既無法自己作運算，又無從自己估計近似值，那學生會如何看待 $\log 2$ 、 $\log 3$ 呢？ $\log 2$ 、 $\log 3$ 對學生來說，是像 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 的數呢？還是像 x 、 y 般的文字符號呢？

第三，「素養」應該是目前中小學教育圈的主要「神主牌」，老師、學生要有「素養」，教學、考試也要有「素養」，好像不跟「素養」沾上邊，就是「政治不正確」。筆者不反對強調「素養」，但現行的「素養」，好像只剩下跟日常生活、實際情境、科學應用的連結才叫「素養」，似乎很少聽到把數學內在的連結、數學思維的訓練標榜為「素養」。比方說，筆者今年所用的南一版課本，例題中有「班佛定律」、「**pH** 值」，這是對數的實際應用，學生能知道對數的實際應用的確是好的，但會有人否定學生將對數跟所學過的數學知識連結、跟歷史方法連結是一種「素養」嗎？就筆者所知，教育部在推行「素養」之前，曾委託中研院李國偉老師調查研究數學的「素養」，筆者曾經填過該研究計畫關於「數學素養」的問卷。該研究計畫的成果，有興趣的讀者可以參看〈數學素養向度建議文〉，看完之後就會發現，現在教學第一線最常接觸到的「素養」，似乎是「偏了」，主角就好像只剩下「素養題」而已。

文章至此已是又臭又長，該結尾了！**108** 課綱高一對數課程的規劃，提供高中數學教師更充足的時間引導學生建立對數的「數」的概念面向，若能再加上與無理數、有理數的連結、以 **10** 為底的簡單對數運算規則，並讓學生利用歐拉的方法，親手「算出」某個對數近似值，相信學生的對數「素養」，就不會只有課本、講義、試卷上的「素養題」而已。擴大學生的「素養」，的確要額外花些時間，但就筆者今年的實際經驗看來，多花的時間並不會很多，但效果與回饋，絕對是值得的！

參考資料

李國偉 **(2012).** 〈數學素養向度建議文〉（教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計畫），網址：**http://tame.tw/old/forum.php?mod=viewthread&tid=176&page=1**。

林倉億 **(2011).** 〈怎麼算 **log2**？〉，《高中數學學科中心電子報》第 **52** 期，網址：**https://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/eArticleDetail.aspx?id=95b2a65f-f130-4206-9381-158209410c71**。

陳界山主編 **(2019).** 《普通型高級中等學校數學（一）》，台南：南一書局。

附錄

主題 5：log2

1. 請閱讀林倉億老師〈怎麼算 log2？〉一文，可至下列網址閱讀該文：
https://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/eArticleDetail.aspx?id=95b2a65f-f130-4206-9381-158209410c71。
2. 請用文中歐拉的方法，求出自己座號+10 的對數值，例如座號是 1 號，請求出 log11 之近似值，座號是 *n* 號，請求出 log(10+*n*)之近似值。請將你的過程，填入下表中。表格中請填入 6 位小數（第 7 位四捨五入），逼近到不能再逼近為止！表格若不夠，請自行增加。比說，若要求 log11的近似值，即使算到 log11.000001，仍要繼續逼近下去！別懷疑，你辦得到的！

$A=10$	$\log A=1$	
$B=100$	$\log B=2$	$C=\sqrt{AB}$
$C \doteq 31.622777$	$\log C=1.5$	$D=$
$D \doteq$	$\log D=$	$E=$
$E \doteq$	$\log E=$	$F=$
$F \doteq$	$\log F=$	$G=$
$G \doteq$	$\log G=$	$H=$
$H \doteq$	$\log H=$	$I=$
$I \doteq$	$\log I \doteq$	$J=$
$J \doteq$	$\log J \doteq$	$K=$
$K \doteq$	$\log K \doteq$	$L=$
$L \doteq$	$\log L \doteq$	$M=$
$M \doteq$	$\log M \doteq$	$N=$
$N \doteq$	$\log N \doteq$	$O=$
$O \doteq$	$\log O \doteq$	$P=$
$P \doteq$	$\log P \doteq$	$Q=$
$Q \doteq$	$\log Q \doteq$	$R=$
$R \doteq$	$\log R \doteq$	$S=$
$S \doteq$	$\log S \doteq$	$T=$
$T \doteq$	$\log T \doteq$	$U=$
$U \doteq$	$\log U \doteq$	$V=$
$V \doteq$	$\log V \doteq$	$W=$
$W \doteq$	$\log W \doteq$	$X=$

3. 完成後請用至少 300 字評論歐拉的方法，務必寫出你認為該方法的優點與缺點。
4. 注意，說該方法「很麻煩」、「很花時間」是最膚淺的評論，請別用這種膚淺評論降低自己週記的格調。在沒有計算機的年代，開根號的近似值對數學家來說，稱不上麻煩！
5. 延伸資料（僅供參考）：
   林倉億 (2010).〈數學史融入教學─以對數表為例〉，《HPM 通訊》13(12): 8-16。
6. 請於 2020 年 10 月 20 日 23:59 前將心得寄至 tylin@gm.tnfsh.tn.edu.tw，並確保評論字數在 $\log 10^{300}$ 字以上。