HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（台北教育大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十二卷第二期目錄2019 年 6 月）

108 數學課綱的隨想：以數學史為切入點

洪萬生
台灣數學史教育學會理事長

一、前言

108 課綱已經公告，並且即將實施，儘管教科書審查作業還尚未全部完成。針對這一份課綱（「十二年國民基本教育課程綱要」關於「國民中小學暨普通型高級中等學校」）中的數學領域，[1]許多第一線的教師同仁提出十分建設性的評論，值得所有數學教育工作者參考借鑑。由於我缺乏中學現場的實際教學經驗，[2]因此，這一篇隨想或許只能聊供談助，尚請各方賢達不吝指教才是。

平心而論，這是我國自從有（數學）課綱以來，[3]課程制訂者（或發展者）首度將小一到高三年級（或 **1-12** 年級）的所有學習單元視為一個整體結構來對待，這當然是在呼應十二年國教的精神。基於此，任何數學教師或一般公民顯然都可以輕易看到國民在高中畢業前，應該學習的數學科目之全貌。這個創舉相當有助於我們針對 **12** 年國教的學習單元，進行一貫統整的系統規劃，從而將來任何人在進行調整或革新時，也有了比較清晰的單元知識之參照輪廓。

這是本課綱的特色之一，非常難能可貴，值得我們一起「按讚」！多年來，我曾經一再指出《加州公立學校數學架構》（***Mathematics Framework for California Public Schools: Kindergarten through Grade Twelve***）的獨特意義。[4]那一份課綱雖然有些細節並

---

[1] 目次如下：壹、基本理念；貳、課程目標；參、時間分配；肆、核心素養；伍、學習重點：一、學習表現，二、學習內容；陸、實施要點：一、課程發展，二、教材編選，三、教學實施，四、教學資源，五、學習評量；柒、附錄：一、學習重點呼應核心素養參考示例，二、議題融入綱要，三、內容主題與分年雙向細目表。這是 **2018** 年 **6** 月公布版本。

[2] 我曾經在「教學實習」期間，擔任國中數學教師一年，不過，那是將近半個世紀的往事。

[3] 參考鄭章華主編，《數往知來 歷歷可數 – 中小學數學課程發展史》上、下冊（新北市：國立教育研究院），頁 **522-564**。

[4] 參考洪萬生，〈教改爭議聲中，證明所為何事？〉，《師大學報：科學教育類》**49(1)(2004): 1-14**。美國其他課綱也呈現了類似的架構，不過，我比較沒有注意。

不怎麼能說服我，[5]但是，它將 **K-12** 年級全部整合在一個架構之中，卻不能不說是一個重大的突破。這是因為如此一來，儘管中小學教師專業訓練（譬如「數學教材教法」課程就不可能一體適用）分流，[6]各個階段的教師還是可以方便地掌握國民基本數學教育內容的全貌，從而對他們自己的教學實施有所啟發。

這份課綱還有一個值得在此註記的特色，那就是：數學史的堂皇「入憲」！它的「基本理念」（共五條）之第三條主張是：**數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感**。其中，數學課綱委員指出：

> **人類各種族文明造就出不同的思維文化，例如，古代東方數學偏向具象方式的歸納推理，而西方則傾向抽象方式的演繹思考，數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同時期與不同文化的差異，更能協助教師釐清數學學習的主軸。所以適時地在數學教學之中融入適當的數學史內容，可以提升數學教學品質與學生的學習成效。（頁 1）**

同時，藉由這種「認識數學的文化面向」之（數學史）進路，「不僅有助於讓數學學習從工具性層次延伸到智識性層次，也更彰顯數學知識的人文價值」。

事實上，這個「**適時地在數學教學之中融入適當的數學史內容**」之策略，就是 **HPM --**「數學史與數學教學的關連」之研究 **--** 的基本訴求。[7]由於我多年以來一直都在推動 **HPM** 的教學與研究，[8]而且，對於數學教育來說，教學（**pedagogy**，美國習慣用 **instruction**）也無法「切割」學生學習（**learning**）乃至於課綱（**curriculum**），因此，在本文中，我打算從數學史或 **HPM** 切入，「隨興地」談論這個 **108** 數學課綱的相關內容（以 **2018** 年 **6** 月公布的版本為準，以下引文頁碼都針對這個文件），希望凸顯它的精神與價值，從而豐富我們對它的整體架構的想像，更有助於最終的付諸實施。

二、與總綱核心素養之連結

12 年國教的總綱核心素養共有三大面向：**A-**自主行動、**B-**溝通互動，以及 **C-**社會參與。其中，「**C-**社會參與」的第三個項目 **C3** 之主題為「**多元文化與國際理解**」。針對這個素養項目，總綱委員強調：國民「**應具備自我文化認同的信念，並尊重與欣賞多元文**

---

[5] 譬如，在 **8-12** 年級的幾何單元中，課綱設計者強調：有關圓形中等弧對等角的一些相當特出的定理，必須在介紹完幾何公理之後的三週內就呈現給學生。而這主要的目的是證明下列兩個定理：**(1)** 等腰三角形兩底角相等；**(2)** 一個三角形的外角等於兩個遠內角的和。不過，上述幾何知識架構會導致循環謬誤（**logical fallacy**），而有損該課綱所自豪的嚴密論證之美意。參考同上論文。

[6] 以台灣師大數學系為例，我們不負責培育未來的國小數學教師，因此，也就不會開授「國民小學數學教材教法」課程。

[7] **HPM** 原是 **International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics** 這個國際研究群的簡稱，這一組織（隸屬於 **ICMI**）的主要目的，是研究數學史與數學教學之關連，因此，**HPM** 也代表了此一學門。最近我們創立的台灣數學史教育學會，其英文名銜就是 **Taiwanese Society for the Relations between History and Pedagogy of Mathematics**。顧名思義，此一學會的使命就是積極面向中小學，提升中小學教師的 **HPM** 素養。

[8] 我曾經在公元 **2000** 年 **8** 月 **9-14** 日，假台灣師大承辦國際數學教育會議的 **HPM** 衛星會議。為此，我還得到國科會的贊助，在 **1998** 年 **10** 月創辦《**HPM** 通訊》並發行至今。

化」，而且還可採取積極行動，「**發展國際理解、多元文化價值觀與世界和平的胸懷**」。

與此對應的普通型高中教育階段之「數學領域核心素養具體內涵」（編碼 **S-U-C3**），則是：

> **具備欣賞數學觀念或工具跨文化傳承的歷史與地理背景的視野，並瞭解其促成技術發展或文化差異的範例。（頁 5）**

顯然，這些都是社會參與的必備（數學）核心素養，而其連結當然是上文提及的「理念三」：數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感。事實上，誠如我們在《當數學遇見文化》之中，所意在強調的數學文化現象：**吾人雖然在不同的文化看見共同的數學，但是，數學也洋溢著不同文化的獨特風格**。這種既全球又在地的特性，在數學知識活動上表現得最為淋漓盡致，而其絕佳切入點當然非歷史文化面向莫屬了。

現在，我們再考察本課綱附錄一「數學領域學習重點與核心素養呼應表參考示例」。針對「學習內容」：

> **N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。（頁 61）**

對照的「學習表現」之評量標準：

> **n-V-5 能察覺規律並以一般或遞迴方式表現，進而熟悉級數的操作。理解數學歸納法的意義，並能用於數學論證。（頁 61）**

課綱委員呼應的數學領域核心素養，即如前文提及的「數 **S-U-C3**」。為了讓學生達成這樣的學習表現，又同時擁有這個核心素養，加一點（史）料似乎是必要的。蘇惠玉的《追本數源》收入三篇相關的 **HPM** 文章，剛好可以作為（「課內」）閱讀的教材：

- 〈歷史悠久的兔子家族與最美的比例之關係〉
- 〈美妙的費氏數列與黃金分割比〉
- 〈數學歸納法的時光之旅〉

在這些論述中，蘇惠玉老師告訴我們如何連結大自然的美與數學（費氏數列或黃金分割），再進一步指出在人造的世界（特別是流行文化）中，這些數學概念又是如何地被應用，而成為文化創意的不可缺少元素。此外，她還指出：一旦吾人有機會出入歷史脈絡，那麼，數學歸納法的方法論意義，就會更加顯豁了。

當然，回歸到教學實施上，這些閱讀「教材」如何引進課堂？此一教學策略與「閱讀素養教育」議題（頁 63）如何結合？我們將另文討論。

三、教材編選與教學實施

在本課綱的「實施要點」中，其「教材編選」及「教學實施」都論及數學史、民族數學與數學家相關課題的引入。比方，針對「教材編選」，課綱委員就建議：

> **教科用書之編寫可適當編入數學史、民族數學及數學家介紹，已引發學生興趣、培養其欣賞數學發展的素養，並瞭解不同族群及性別者的成就與貢獻。鼓勵原住民重點學校之教材編選，適度與當地原住民文化結合，進行文化回應教學。（頁 54-55）**

針對其「教學實施」，他們則強調：

> **教師在教學過程中可適當介紹數學史、民族數學及數學家，融入數學的人文觀、培養其欣賞數學發展的素養，但不可將這些內容納入評量。（頁 56）**

不過，對我（身為專業數學史家及 **HPM** 推動者）來說，這個「善意的」提醒似乎沒有必要。我覺得任何一位數學教師，無論他（她）有沒有 **HPM** 素養，一定都會自行斟酌是否針對這些（融入的）數學史教材，[9]在課堂上進行講解或討論。以畢氏定理（《幾何原本》版）**vs.** 弦圖（《周髀算經》版）為例（參見圖 **1**），難道我們不應該提供一個「**瞭解其促成技術發展或文化差異的範例**」，給較不適應於制式學習（**conventional learning**）的學生嗎？更何況，此一「對比」在人文關懷之外，也洋溢了認知的旨趣，相信即使純就制式學習來考量，也不會視而不見才是。

上述這個涉及方法論（**methodology**）的文化風格之對比，也頗適合充當（回家）作業，目標不妨設定為提升數學閱讀與寫作的能力，但人文關懷面向則可引導學生討論此一命題的「稱謂」（**naming**），究竟稱作畢氏定理？商高定理？或是勾股（弦）定理？哪一個名稱最恰當？等等。我在台灣數學史教育學會成立大會的祝賀報告中，也提到一個數學「正名」作業，請參考圖 **2-4** 及下文說明。

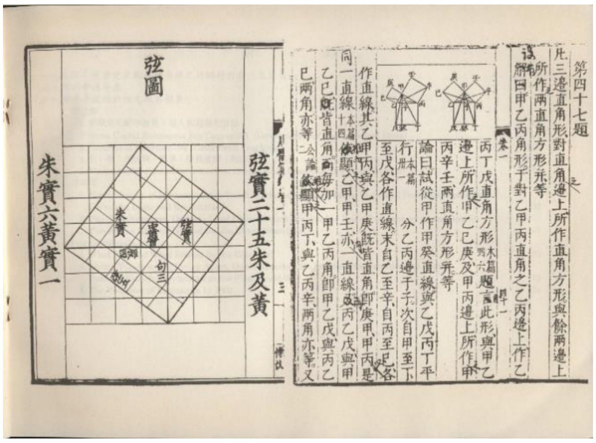


圖 1：畢氏定理的兩種證法

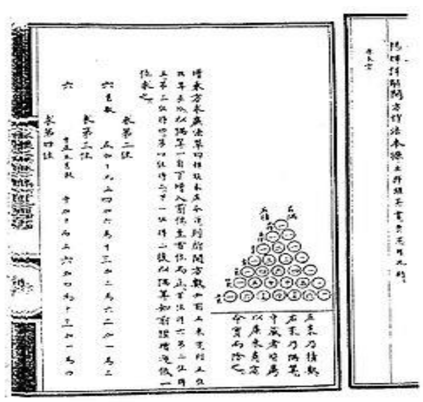
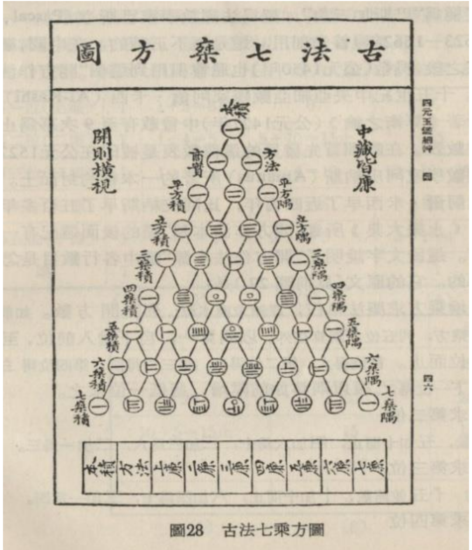


圖 2：楊輝三角

[9] 這是教師的教學自主權，我們百分之百尊重！



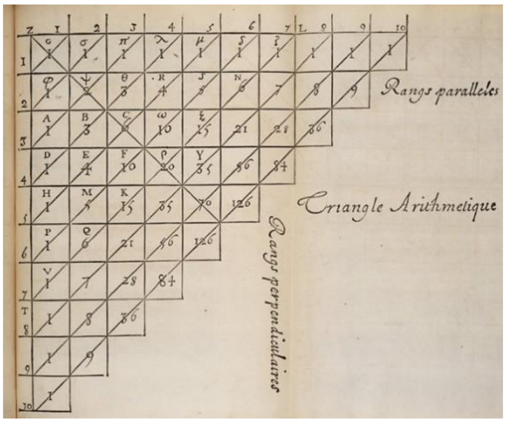


圖 3：古法七乘方圖　　圖 4：算術三角形

所謂的「楊輝三角」，是從《永樂大典》抄出的二項展開式之係數表，由於南宋數學家楊輝抄自北宋賈憲，因此，也有人稱之為「賈憲三角」。在中國元代，數學家朱世傑在他的《四元玉鑑》**(1303)** 中，稱此三角形為「古法七乘方圖」。在這個圖形中，朱世傑還增列了斜線，明確地連結到他的經典的另一個主題：垛積術（高階等差級數求和）。至於巴斯卡三角，則出自法國天才數學家巴斯卡（**B. Pascal**）的《論算術三角形》，中文版本可參考李文林主編《數學珍寶》。我的作業如下：

> **分析並比較這三份文本的內容。並且綜合寫一篇報告，主題或可圍繞在這個三角形的稱謂，稱呼它是「楊輝三角」或「巴斯卡三角」，哪個比較合適？為什麼？**

我也另外指出一些寫作的論述提點，讓讀者瞭解我們的思維「出入」脈絡：

> **巴斯卡如何研究這個三角形物件 (entity) 本身？他看到哪些東西數學家看不到的東西？又，外在脈絡或知識獵奇 (intellectual curiosity) 如何引導他的新發現？**[10]

前面兩個作業的學習目標似乎有一點「高調」，不過，這也說明 **HPM** 評量議題的重要性。我在《數學起源》**(2019) --** 一本附有習題的數學史著作 **--** 推薦序中指出：如果我們引導學生採取如同古代數學家的一樣步驟解題，並且敦促他們在面對同樣困難時，去思考答案的合理性，「**這就是欣賞古代學者的聰慧與創意之最佳途徑。我們發現學生欣然介入這種學習數學史的深入進路，以及他們經由古代、另類的解題進路之分析，而得以理解當今數學。**」因此，只要作業或習題設計得宜，就能讓學生分享數學史或 **HPM** 所引進的「另類」學習成效。

此外，我們台灣 **HPM** 團隊更早翻譯的《溫柔數學史》（**2008**），也是以中小學數學教師為目標讀者的 **HPM** 專書，其中每個素描（共 **25** 個）之後，都附有兩類作業：習題與

---

[10] 可參考蘇惠玉，〈數學歸納法的時光之旅〉及〈巴斯卡其人其事〉，載蘇惠玉，《追本數源》，頁 **48-65**。

專題。以素描 **12**（主題為畢氏定理）為例，它們的習題與專題之設計都很有創意，請參看如下各自一則的引述：

習題

- **本節素描提到歐幾里得證明了畢氏定理的一般化結果，可應用至直角三角形上的任意相似圖形。這是在《幾何原本》第六卷的命題 31。請你去找一本《幾何原本》，閱讀這個命題和它的證明。證明的內容是否依賴畢氏定理？（如果不是，那麼它就提供了畢氏定理的另一個證法，因為正方形是相似形的特例。）(《溫柔數學史》，頁 268）**

專題

- **閱讀歐幾里得對畢氏定理的證明（在《幾何原本》第一卷命題 47)。接著請「溫柔地」改寫他的論證，使得難度適合高中生。(《溫柔數學史》，頁 270）**

平心而論，這兩則作業除了涉及《幾何原本》(***The Elements***）這部古典文本之外，它們的問題意識都相當「制式」，因此，絕對適合作為一般評量的作業來使用。我們來對照它們如何呼應「課程編選」及「教學實施」的提醒。「課程編選」強調：

教科用書的編寫應注意整體結構的有機結合，在題材呈現上能反映出各數學觀念的內在連結。(頁 54）

同時，「教學實施」也期待教師認識到：

數學與其他領域/科目的差異，在於其結構層層累積，而其發展既依賴直覺又需要推理。(頁 56）

我想一般的評量作業應該都可以設計到符合這些要求，不過，上引這兩則作業似乎較能凸顯數學知識的這種結構性風貌（**structural aspects**)，尤其是縱深面的（階層）統整（**vertical integration of hierarchical levels**)，更是《幾何原本》的所以成為經典的標記了。至於這些進路的引入，如何可以「自然地」連結到總綱核心素養 **A2** 的「系統思考與解決問題」上，則有待進一步釐清。在此，先引述 **A2** 項目說明如下：

具體問體理解、思辨分析、推理批判的系統思考與後設思考素養，並能行動與反思，以有效處理生活、生命問題。

何謂「系統思考」？我們從附錄一的參考示例（頁 **59**）對應的核心素養「數**-E-A2**」、「數**-J-A2**」及「數 **S-U-A2**」之說明，完全看不出所以然來。不過，我們以後會另撰他文，回來探討這個議題。

四、多元選修課程推薦

上一段最後的問題 -- 比方，如何培養系統思考素養？ -- 之所以難以處理，原因全在於參考（演）示例（**demonstrative example**）的欠缺。這個不足可望由多元選修課程來彌補。我們不揣鄙陋，在此推薦兩門多元選修課程，其學習目標都指向學習數學結構的「層層累積」特性。儘管不無紙上談兵之嫌，但是，拋磚引玉，或許可以激發更多容易實施的課程出來。

我推薦的這兩門課當然都與數學史有關。第一門課：「歐幾里得《幾何原本》及其哲學文化脈絡」。時間規劃：一學期 **2** 學分。教材主要根據《數學起源》（***The Historical Roots of Elementary Mathematics***）第 **5-6** 章。至於實施方式：可協同歷史或哲學專業的老師合作教學。本文上一節已提及的《數學起源》，三位作者奔特、瓊斯，及貝迪恩特都出身荷蘭，三人推動 **HPM** 的歷史都十分悠久，誠如前述，他們的論述都表現了數學與數學史的雙重洞察力，而且主題是初等數學（**elementary mathematics**），因此，非常適合充當高中數學史教材。此處，我們稍加介紹其第 **5-6** 章內容，方便有意採用的老師參考。這第 **5** 章主題是「歐幾里得的哲學先驅」，目次則依序是「哲學與哲學家」、「柏拉圖」、「亞里斯多德和他有關敘述句的理論」、「概念與定義」，以及「特殊概念與未定義項」。所有這些都是歐幾里得編纂《幾何原本》的希臘哲學文化脈絡。事實上，柏拉圖及亞里斯多德的數學哲學（**philosophy of mathematics**）主張，在歐幾里得身上都得到具體實現的機會，我們只要對照第 **6** 章的前幾個目次如「定義」、「設準與共有概念」、「幾何作圖的意義」、「設準 **III** 的意圖」等等，就可以略窺一二。

我推薦的另一門課是「國中數學回顧與銜接」，一學期 **2** 學分。教材可根據《數學思辨之旅：拆解國中數學，建立數學素養與能力》來編輯。本書作者是永野裕之（科普作家/補習班老闆/交響樂團指揮），他在〈序言〉中特別強調：「**我必須先說清楚，本書主旨並不在於教大家要從頭學習國中數學。本書乃根據數學史，以國中數學為基礎，來探究學習數學的意義與價值。**」因此，這一門「國中數學回顧與銜接」非常適合安排在高一上學期選修。我推薦的依據還可參考永野裕之對於本書的（普及）內容定位之簡介：本書將國中生學到的數學分成：幾何學（第 **1** 章）、代數學（第 **2** 章）、函數（第 **3** 章），及機率與統計學（資料的運用，第 **4** 章）四大領域。「**各章前半部皆記述相關的數學史，後半部則統整希望讀者在該領域所應得的領悟，其中適時地穿插了『題目』，但本書基本上不是教科書，數學不好的讀者可以快速翻過艱澀的部分。當然，自認有能力的讀者，請務必要挑戰這些題目，體驗解題的樂趣。**」

永野裕之的「提醒」，對於國中生要想「平順地」過渡銜接到高中階段，至關緊要。其實，在我們的「教材編選」要點中，課綱委員就十分殷切指出：「**國民小學進入國民中學教育階段，為使學生適應學習場域與學習方式的轉換，應適當安排教材內容與教法，讓教師有機會協助學生銜接跨階段時學習狀態的落差。**」（頁 **54**）不過，在同一條要點中，卻少了國中到高中的對等部分之論述 。[11]有鑑於學生對於數學的學習態度之轉變都

[11] 目前高一的銜接課程大似乎都在補充一些國、高中之間漏掉的單元環節，而非在知識結構上，有意識地總結國中，面向高中。

發生在高一或高二，[12]因此，我們在推動國、高中的階段銜接時，應該要有同等的關懷才是。

五、結論

拜新世紀全球公民素養訴求風潮之賜，數學史或 **HPM** 終於在我國的數學課綱中，找到一個應有的位置。至於數學史所以有此「榮遇」，顯然與國際之間 **HPM** 的熱潮息息相關。我們從公元 **2000** 年正式引進此一學門，一邊培訓中學教師的數學史專業，一邊與其他數學教育研究互通有無，無論在正規或非正規教育場合與實務中，我們都非常努力扮演「擦板球」的籃板角色。如今，數學史在數學教育實務中總算獲得肯定，這對所有數學史的愛好者來說，都是令人振奮的一件大事。因此，儘管 **108** 數學課綱受限於篇幅，其中，數學史與總綱核心素養項目說明的連結，不免令人感覺意猶未盡，不過，我們相信一旦教師開始掌握 **HPM** 的洞識與進路，他（她）們對於其他相關的核心素養，也一定可以觸類旁通才是。

在本文中，我試圖就數學史在本課綱被期待的「功能」，分享一些基於我自身的研究與實務，這些經驗雖然並非直接關乎中學教學，然而，我長期在台灣師大數學系四年級開授「數學史」課程，以及指導研究生（包含許多現職的教師）進行數學史/**HPM** 之研究，再加上這幾年還陸續為台灣師大、台灣大學開授「數學通識」課程，[13]因此，針對這些比較菁英的（大）學生如何回應 **HPM** 的教學進路，多少有一點瞭解。因此，本文所藉以說明或澄清 **HPM** 的幾個作業，確實是長期教學經驗累積而成。

這些經驗當然也受惠於相關教學資源的多角度開發。我從 **2006** 年開始出版 **HPM** 方面的著作，譬如《此零非比〇》，然而，並沒有帶出什麼有意義的迴響。直到近十年來，**HPM** 的「被容受」程度，似乎已有了明顯的改變跡象。在這期間，由於閱讀運動的連帶效應，我們有機會透過著述及翻譯，出版多本具有普及風格的數學史著作，[14]其中有些正如前述，甚至可以直接充當教材的 **HPM** 專書。事實上，當我們企圖將閱讀素養融入數學教學時，這些數學史書籍也是極適合普及閱讀使用的讀物。因此，將數學史融入教學的進路，也一定可以將十二年國教的「閱讀素養議題」融入數學教學，一舉兩得，我們將另文討論。

總之，**HPM** 的使命並不是要用「數學史」來取代「數學」。然而，它關乎多項的十二年國教的數學素養，因此，它的教育「正當性」已毋庸置疑。我們應該好好運用數學史的進路之特性，除了「培養學生的文化美感」之外，也讓它極力想要凸顯的「系統思考」或「後設思考」，至少能成為學生數學思維能力的一個重要環節。

參考資料

---

[12] 這是我在台大、台師大任教數學通識時，非正式的詢問結果。

[13] 我曾為台大開授「數學與文化：以數學小說閱讀為進路」，目前為台灣師大開授（與謝佳叡合作）「小說與電影中的數學思維」。

[14] 參考洪萬生，〈台灣數學普及三十年〉。

Fauvel, John and Jan van Maanen (2000)， *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.
李文林主編 (2000)，《數學珍寶》，台北：九章出版社。
永野裕之 (2017)，《數學思辨之旅：拆解國中數學，建立數學素養與能力》，新北市：世茂出版社。
洪萬生 (2004)，〈教改爭議聲中，證明所為何事？〉，《師大學報：科學教育類》49(1): 1-14。
洪萬生 (2004)，《中小學數學教師學科知識的縱深統整：以結合 HPM 的探究為進路》(NSC 93-2521-S-003-015-, 2004/08/0-2006/07/31)。
洪萬生 (2006)，《此零非比〇》，台北：台灣商務印書館。
洪萬生 (2007)，〈傳統中算家論證的個案研究〉，《科學教育學刊》10(4): 357-385。
洪萬生 (2018)，〈台灣數學普及三十年〉，Open Book 閱讀誌 https://www.openbook.org.tw/reviewer/19516，2018 年 8 月 7 日。
洪萬生 (2019)，〈數學閱讀與寫作：新世紀的 HPM 使命〉，台灣數學史教育學會創立祝賀報告（簡報檔），2019/01/19 發表於台灣師範大學數學系 M212。
洪萬生主編 (2018)，《窺探天機：你不知道的數學家》，台北：三民書局。
洪萬生、英家銘、蘇意雯、蘇惠玉、楊瓊茹、劉柏宏合著 (2009)，《當數學遇見文化》，台北：三民書局。
鄭章華主編 (2018)，《數往知來 歷歷可數 – 中小學數學課程發展史》上、下冊，新北市：國立教育研究院。
蘇惠玉 (2018)，《追本數源：你不知道的數學秘密》，台北：三民書局。
比爾・柏林霍夫、佛南度・辜維亞 (2008)，《溫柔數學史》(*Math through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others*)，台北：博雅書屋。(中譯者：洪萬生、英家銘暨台灣 HPM 團隊)
盧卡斯・奔特、菲利 普・瓊斯，及傑克・貝迪恩特 (2019)，《數學起源》(*The Historical Roots of Elementary Mathematics*)，台北：五南圖書出版公司。(中譯者：黃美倫、林美杏、邱珮瑜、王瑜君、黃俊瑋、劉雅茵)

網路資源

《HPM 通訊》：https://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm
台灣數學博物館：http://mathmuseum.tw/

數學詩創作

命運的絕對值

廖惠儀
高雄市大仁國中

SO

是墜落的速度，　直到
陌陌漠漠默默的二維空間。

是唐突的偶然？
是離奇的劇本？
辭別了自由，
悄悄的，命運之神的一擊。

驚惶的跫音，
錯落在苦痛中喚醒了夜，
扯開旅程的經緯，
輾過心魂的排列，
慘淡，是希望的面容。

SO

是拼圖的聲息，　掌理
骨頭、血液、神經、肌肉的藩主們，
盤踞在各自的象限，
X 光片和數字是巡邏的士兵。

我此時在荒蔓荊棘的無邊無際徘徊，
對著天守閣內的藩主們發問

「我在哪裡？」

藩主們睥睨著
斑駁的、離散的、斷片的步履，
揪住士兵，
呢喃兀兀解方程。

是囚衣的顏色，　嘲諷
渺小、如夢似真的 i 的存在。
是被鎮壓在白色巨塔底的幢幢鬼影？
還是安息之地？
是放逐
還是死去？
這是個不真實的真實城市，
失落是勇氣的叛逆。

心緒是三角函數的俘虜，
扁舟湍險，

一陣，一陣，一陣。

向前，向前，向前！

Mi

是餘燼的潑墨畫。
價值、標準、目的、意義在火焰中咆哮，
讓路，
愛，安靜地說。

甦醒的天倫的幸福 |！|

秋冬春夏的滿足 |！|

記二〇一七
年七月的一場病

從一道算額問題到數學科展

黃俊瑋、朱舢樺、程紘琪
台北市立和平高中

一、前言

筆者在〈奉掛御寶前算額－累圓容切問題〉一文中，[15]曾經介紹過一道江戶時期的算額問題，此算額於西元 **1844** 年（天保十五年）被當時的和算家奉納於「四日市市」郊區一所神社中（如圖 **1** 所示）：

圖 **1.** 「奉掛御寶前算額」的算額

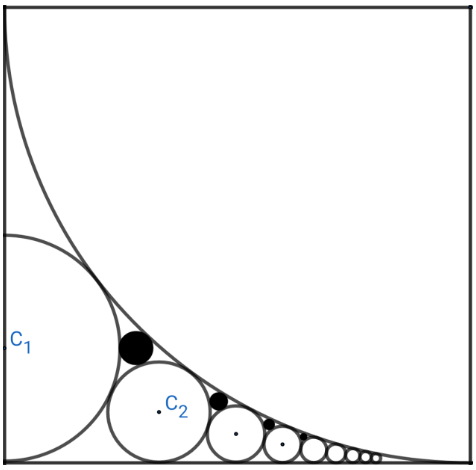


圖 **2.** 算額問題示意圖

首先，筆者簡略地重述本算額問題，如圖 **2** 所示，畫有一個「大圓 $\mathbf{C_0}$」（事實上它是一個四分之一圓）與兩條互相垂直的切線段，另外左側畫有一個「半圓」（稱為白圓 $\mathbf{C_1}$）與大圓、直線均相切，接著如下方式作出問題中的「累圓」（即圖 **1** 中的一系列白圓）與「狹圓」（即圖 **1** 中的一系列黑圓）：

1. 先畫一系列白圓：

白圓 $\mathbf{C_2}$ 同時與半圓（白圓 $\mathbf{C_1}$）和大圓 $\mathbf{C_0}$ 外切，並與直線相切；白圓 $\mathbf{C_3}$ 同時與白圓 $\mathbf{C_2}$ 和大圓 $\mathbf{C_0}$ 外切，並與直線相切；白圓 $\mathbf{C_4}$ 同時與白圓 $\mathbf{C_3}$ 和大圓 $\mathbf{C_0}$ 外切，並與直線相切；白圓 **5** 同時與白圓 **4** 和大圓外切，並與直線相切，以此類推。[16]

2. 再接著作一系列黑圓：

黑圓 C_1' 與大圓 $\mathbf{C_0}$、半圓（白圓 $\mathbf{C_1}$）和白圓 $\mathbf{C_2}$ 均外切；黑圓 C_2' 與大圓 $\mathbf{C_0}$、白圓 $\mathbf{C_2}$ 和白圓 $\mathbf{C_3}$ 外切；黑圓 C_3' 與大圓 $\mathbf{C_0}$、白圓 $\mathbf{C_3}$ 和白圓 $\mathbf{C_4}$ 均外切，以此類推。[17]

如此，便構成了本算額上的幾何圖形。了解本圖形中各圓的相切關係之後，本問題

---

[15] 黃俊瑋，〈奉掛御寶前算額－累圓容切問題〉，HPM 通訊第 21 卷，第 6 期，2018。

[16] 即相切兩圓 C_0（大圓）、C_1（半圓）與外公切線 L 所夾區域的外公切圓為 C_2；C_0、C_2 與外公切線 L 所夾區域的公切圓為 C_3，以此類推，C_0、C_n 與外公切線 L 所夾區域的外公切圓為 C_{n+1}。

[17] C_0、C_1 與 C_2 的外公切圓為黑圓 C_1'；C_0、C_2 與 C_3 的外公切圓為黑圓 C_2'；以此類推，C_0、C_n 與 C_{n+1} 的外公切圓為黑圓 C_n'

的條件與所求如下：

> **已知圖中的大圓直徑為 121 寸 8 分（即 1218 分），而圖中的末圓（最小的黑圓）直徑為 1 分，求圖中黑圓的總數。**[18]

本算額在「答曰」中，給出了本問題的答案「16 個」。並在「術曰」中說明：先將大圓徑 1218(分)，除以末圓徑 1(分)的 4 倍，得 304.5。接著，開平方並省去小數部份得 17，最後將此數值減 1，所得即為圖中黑圓的個數 16。本算額問題基本上是給定圖 1 中大圓與第 n 個黑圓的半徑，欲求黑圓的個數 n，而上述的術，本質上是一般化的公式解。

另一方面，在該文中筆者也提到：

> **日本江戶時期遺留下來的算額或和算文本中的問題，包含了許多有趣多樣化的幾何問題，除了可提供對數學有興趣者挑戰之外，當中許多問題，都值得作進一步的推廣與發展，亦適合作為中學生專題研究，甚至是科展的題材。**

因此，筆者去年也指導了 2 位學生，以解決本算額問題為出發點進行數學科展研究。除了解出此問題，並進一步探討圖形中各圓之間的半徑關係與圓心軌跡，接著，再將此問題延伸推廣，改變初始條件與半徑關係，再試著探討多圓相切時的相關性質。

二、與本研究主題相關之數學問題與數學工具

本問題中的幾何圖形主要由若干個相切的圓或直線所構成，這類問題是江戶時期和算家們特別感興趣的「累圓容切」問題，當然除了本問題這類「基本款」之外，和算家們也推廣出多個圓與三角形、長方形、多邊形相切的問題，甚至將圓推廣至橢圓，或者將平面問題推廣成為空間中，若干個球彼此相切，或是若干個球與各類錐體的容切問題等。[19]

然而，除了日本數學家對多圓相切問題感興趣之外，西方數學家瑪菲堤也曾提出下列著名的瑪菲堤問題：「給定一個三角形，在不超出三邊的限制之下，如何在其內部做三個圓，使其總面積盡可能地為最大？」瑪菲堤在 1803 年首次提出這個問題，當時他認為他已知道問題的解答，也就是在三角形中做三個圓，使其兩兩外切，並與三角形的邊相切（如圖 3）。然而，後人陸續發現特例說明瑪菲堤是錯誤的，甚至發現瑪菲堤的答案永遠不可能正確的！[20]

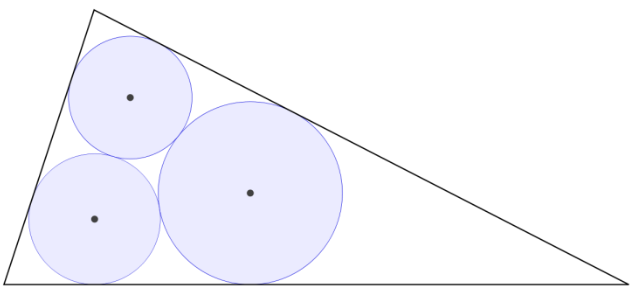


圖 3. 瑪菲堤所提出的解答圖形[21]

---

[18] 分與寸皆為源於古代中國的長度單位。
[19] 引自黃俊瑋（2018），〈奉掛御寶前算額－累圓容切問題〉，《HPM 通訊》21(6)。
[20] 參考大衛・艾契森（2013），《掉進牛奶裡的 e 和玉米罐頭上的 π》，台北市：臉譜出版社。
[21] 本圖引自 “Malfatti circles”by Wikipedia。

在瑪菲堤問題中，研究者們關心的是欲使三角形中三個相切圓的面積和最大，而且僅限三個圓，是從「最佳化」的角度去思考問題，不過，我們的科展問題與瑪菲堤的研究方向不同，研究中主要想探討各相切圓半徑的關係，而非求固定圖形內所切圓的最大面積總和。並且本研究聚焦在以下三個主要方向上：

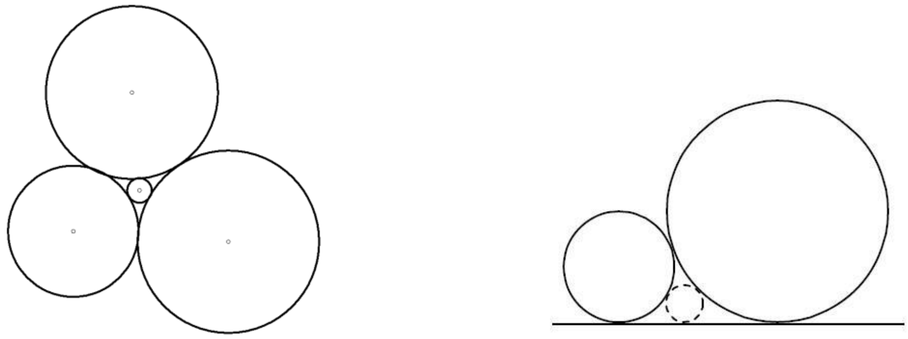
1. 研究中，首先探求算額問題中，一系列白圓與黑圓的半徑公式，進一步求得該問題的公式與答案，並探討圓心所在的圖形。

2. 將原問題推廣，研究一般化的情況：大圓與半圓半徑的比值為正整數的情況，並聚焦大圓與半圓的半徑比值為完全平方數的情況。

3. 將研究問題的條件修改為給定三個兩兩外切的圓，探求一系列公切圓半徑公式：從三圓半徑皆相
等的條件開始，接著討論其中兩圓半徑相同，最後是三圓半徑皆相異的情況，逐步改變三圓半徑的關係將問題一般化。

在研究與證明的過程中，我們發現需利用到索迪公式（**Soddy Formula**），這個公式是於 **1936** 年由索迪（**Soddy**）發表，它描述了當四個圓兩兩相切時其半徑的關係。如圖 **4(a)**所示，圖形中各圓兩兩相切，就有如圓與圓彼此相吻，因此它又稱為**"the kissing circle"**。（事實上，第四個圓可與其它三圓外切或內切）

索迪公式 1[22]
若四圓兩兩外切，則此四圓的半徑 ***a,b,c,d*** 滿足 $2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2})=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d})^2$



(a) **(b)**

圖 **4.** 索迪公式圖形

除此之外，若將上述四個相切的圓改成三個彼此外切的圓與一外公切線時（如圖 **4(b)**所示），則可將外公切線視為一個半徑為無限大的圓（即倒數為 **0**），帶入索迪公式，可得 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)$。此時，原本的索迪公式可簡化如下：[23]

[22] 證明請參閱〈索迪公式〉：http://lyingheart6174.pixnet.net/blog/post/5121475-%E7%B4%A2%E8%BF%AA%E5%85%AC%E5%BC%8F%28soddy-formula%29

[23] 本研究中，把四圓兩兩相切的情況稱為「索迪公式 1」，把三圓與直線兩兩相切的情況稱為「索迪公式 2」。

索迪公式 **2** 當三圓兩兩外切時，三圓的半徑 a,b,c 滿足 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)$

索迪自己的詩作〈精確之吻〉(第一段）便點出了他所創公式的精髓（引自葛登能，《數學馬戲團》)：

兩唇輕吻，誰還在乎三角函數。

四圓相觸可不同，每圓皆能吻三圓。

如此親密的接觸，四圓必須三含於一或者一含於三。

若為一含於三，那麼就不用懷疑， 每個圓的外表都有三個唇印。

若為三含於一，則大圓少不得被人從裡面偷親三下。

三、本研究之研究過程與主要研究成果

接下來，筆者就簡單介紹本科展研究的主要成果，不過礙於篇幅限制，本文將定理的證明過程略去。而主要的研究架構可整理如圖 **5**：

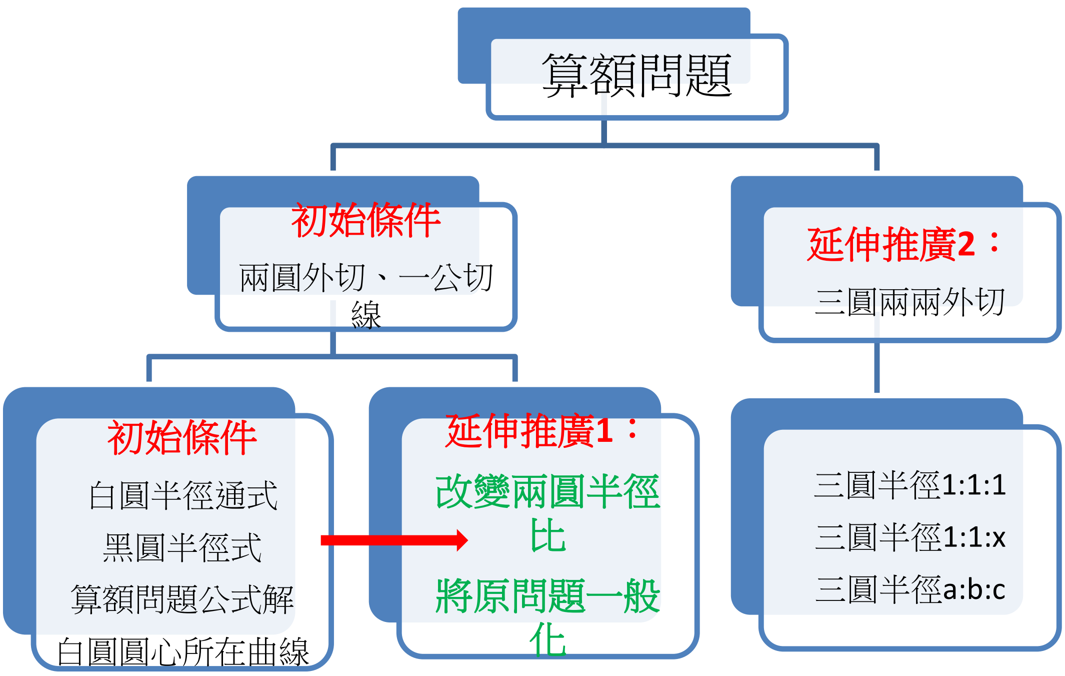


圖 **5.** 研究流程圖

（一）白圓、黑圓半徑公式與原算額問題的公式解

為解此算額問題，先由白圓半徑公式著手，再求得黑圓半徑公式，如此就能解出這個問題，並進一步探討圖形中各白圓圓心所在的圖形方程式。

我們將大圓的半徑設為 r_0 ，半圓為第 **1** 個白圓 C_1 ，且設其半徑為 r_1 ，並設第白圓 C_n 的半徑為 r_n ，黑圓 C_n' 的半徑為 b_n 。接著，先探求白圓與黑圓的半徑公式，並用來解決此算額問題。首先，我們證明了定理 **1.1**。

定理 1.1 若白圓C_{n-1}的半徑$r_{n-1}=\frac{1}{x}r_0$，則C_n的半徑$r_n=\left(\frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2}\right)r_0=(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1})^2 r_0$。

接著，利用定理 1.1 可證明定理 1.2 及定理 1.3：

定理 1.2（白圓半徑公式）

若大圓與白圓C_1（即原問題的半圓）的半徑比為$1:\frac{1}{4}$，則第 ***n*** 個白圓的半徑為

$r_n=\frac{r_0}{(n+1)^2}$。

定理 1.3（黑圓的半徑公式）

若大圓與白圓C_1（即原問題的半圓）的半徑比為$1:\frac{1}{4}$，則第 ***n*** 個黑圓半徑b_n

$=\frac{\mathrm{r}_0}{4(n^2+3n+3)}$。

利用定理 1.3，便可推導出原算額問題的一般性公式解為$n=\left[\sqrt{\frac{r_0}{4b_n}}\right]-1$。

同時，若令原算額圖形的左下角為原點（如圖 6 所示），則可求出白圓的圓心所在曲線的軌跡方程式為$(x-r_0)^2=4r_0y$，其為拋物線。

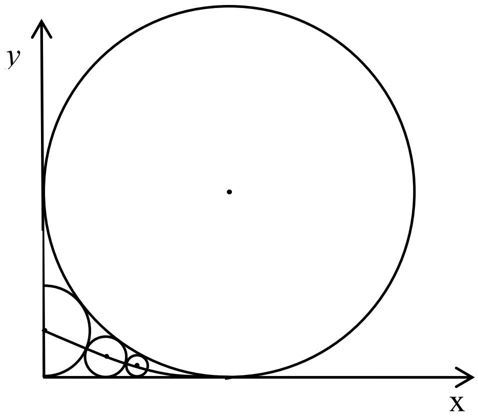


圖 6. 圓心軌跡示意圖

（二）延伸推廣 1：改變大圓與半圓的半徑比值

在初步計算後，可得知原算額問題中的大圓與半圓半徑的比值為$1:\frac{1}{4}$，於是我們思考，若大圓與半圓半徑的比值改變後，白圓與黑圓的公式會不會有甚麼變化？接著，便改變大圓和半圓的比值，在大圓與半圓半徑比值為正整數的條件下，得到一系列黑圓與白圓的半徑公式。藉此研究一般化新問題的公式解，並同樣探討圖形中各白圓圓心所在的圖形方程式。

當原題目圖形中大圓C與第一個白圓C_1（即圖中半圓）的半徑比例為$1:\frac{1}{k}$時，可獲得定理 **2.1** 及定理 **2.2**，即新的白圓半徑公式，與黑圓半徑公式，並可利用數學歸納法證明之。

定理 **2.1** 若大圓:半圓=$1:\frac{1}{k}$，$k\in N$，則白圓的半徑$r_n=\frac{1}{[(n-1)+\sqrt{k}]^2}r_0$ 。

定理 **2.2** 若大圓:半圓=$1:\frac{1}{k}$，$k\in N$，則黑圓的半徑$b_n=\frac{r_0}{4[(n+\sqrt{k})^2-(n+\sqrt{k})+1]}$ 。

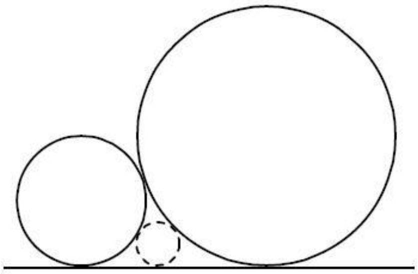
特別地，因為上述公式帶有根號，因此，當大圓與半圓半徑之比為$1:\frac{1}{k^2}$，$k\in N$時，此公式可以進一步簡化為：

$$\text{白圓半徑 } r_n=\frac{r_0}{[(n-1)+k]^2}\text{、黑圓半徑 } b_n=\frac{r_0}{4[(n+k)^2-(n+k)+1]}$$

此時，原算額問題的公式解可推廣為$n=\left[\sqrt{\frac{r_0}{4b_n}}\right]-(k-1)$。又當$k=2$時，$n=\left[\sqrt{\frac{r_0}{4b_n}}\right]-1$，即為原算額問題的公式解。同樣地，若假設原圖形左下角為原點，則可求得白圓的圓心所在曲線的軌跡方程式為$(x-r_0)^2=k^2r_0y$，同樣為一拋物線。

（三）延伸推廣 2：三圓內切累圓問題

由於原問題中的直線可視為半徑無限大的圓，因此，我們嘗試將問題修改，把原問題中的外公切線改成圓，探討已知三個兩兩外切的圓（如圖 **7** 與圖 **8** 之示意圖），求一系列列相切圓的半徑公式。因為此推廣後的新問題不再包含直線，因此證明的過程中需要用到索迪公式 **1**。首先，從最三圓半徑相等的最基本情況出發，接著，把問題推廣，討論恰有二個圓半徑相同，並與第三個圓半徑不同的情況，最後把問題一般化，探討三圓半徑皆不相等的情況。並獲得了定理 **3.1**、定理 **3.2**、定理 **3.3** 與定理 **3.3'**，其中，定理 **3.1** 與 **3.2** 都是定理 **3.3'**的特例。



一延伸推廣→

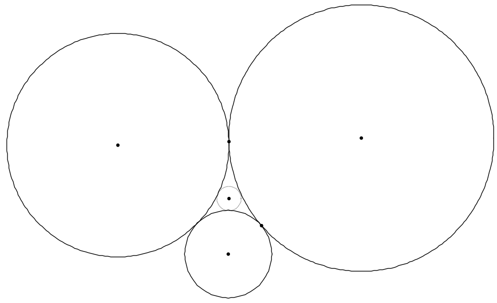


圖 **7.** 給定外切的兩圓與外公切線　　圖 **8.** 給定三個圓兩兩外切

定理 **3.1** 設三圓彼此外切且半徑為r_0，若圓 **C** 與三圓皆外切，則圓 **C** 的半徑 $r=\frac{1}{3+2\sqrt{3}}r_0$。

定理 **3.2** 設三圓彼此外切且半徑分別為$r_0,r_0,\frac{1}{x}r_0$，若圓 **C** 與三圓皆外切，則圓 **C** 的半徑

$$r=\frac{(x+2)-2\sqrt{2x+1}}{x^2-4x}r_0=\frac{1}{(x+2)+2\sqrt{2x+1}}r_0 。$$

定理 3.3 設三圓彼此外切且半徑分別為 $r_0,\frac{r_0}{a},\frac{r_0}{b}$ ，若圓 **C** 與三圓皆外切，則圓 **C** 的半徑

$$r=\frac{1}{a+b+1\pm 2\sqrt{a+b+ab}}r_0 。$$

定理 3.3' 設三圓彼此外切且半徑分別為 a,b,c ，若圓 **C** 與三圓皆外切，則圓 **C** 的半徑

$$r=\frac{1}{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+2\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}} 。$$

其中，從最一般化的定理定理 **3.3'** 來看，此公式具有漂亮的對稱性。

有了定理 **3.1**、定理 **3.2**、定理 **3.3** 與定理 **3.3'** 之後，我們仿照原算額問題，繼續討論並推導出一系列公切圓的半徑通式：

定理 3.4 給定圓 ***A***、圓 ***B***、圓 ***C*** 三圓兩兩外切且半徑皆為 r_0 ，設圓 C_1 與三圓皆外切，且設圓 C_n 與圓 ***A***、圓 ***B***、圓 C_{n-1} 皆外切（ $n\ge 2$ ），則圓 C_n 的半徑

$$r_n=\frac{1}{\left(2n^2+1\right)+2n\sqrt{3}}r_0 。$$

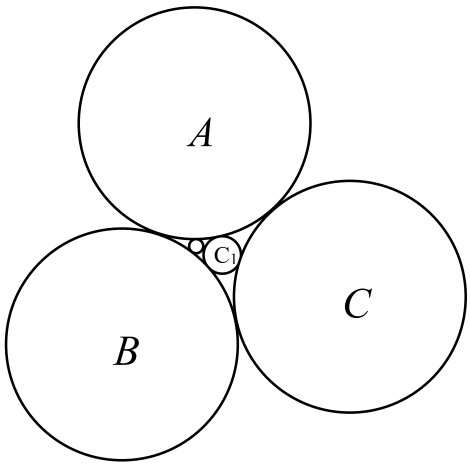


圖 9. 定理 3.4 示意圖：三圓兩兩外切且其中三圓半徑相等

定理 3.5 給定圓 ***A***、圓 ***B***、圓 ***C*** 三圓兩兩外切且半徑分別為 $r_0,r_0,\frac{1}{x}r_0$ ，

(1) 設圓 C_1 與三圓皆外切，且圓 C_n 與圓 ***A***、圓 ***B***、圓 C_{n-1} 皆外切（ $n\ge 2$ ），則圓 C_n 的半徑 $r_n=\frac{1}{2n^2+x+2n\sqrt{2x+1}}r_0$ 。

(2) 設圓 D_1 與三圓皆外切，且圓 D_n 與圓 ***A***、圓 ***C***、圓 D_{n-1} 皆外切（ $n\ge 2$ ），則圓 D_n

的半徑 $r_n = \dfrac{1}{(x+1)n^2+1+2n\sqrt{2x+1}} r_0$ 。

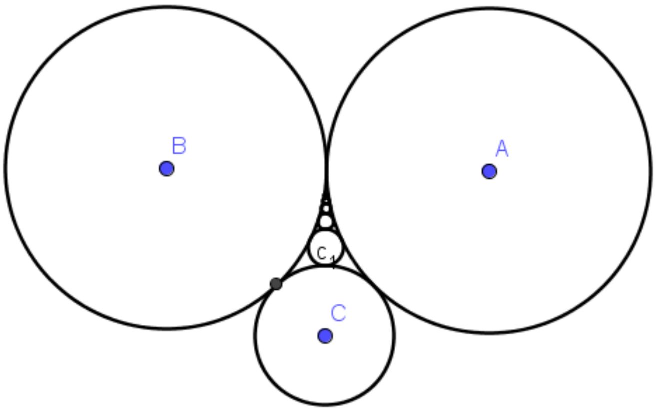


圖 10. 定理 3.5 示意圖：三圓兩兩外切且其中兩圓半徑相等

$\boxed{\text{定理 3.6}}$ 給定圓 ***A***、圓 ***B***、圓 ***C*** 三圓兩兩外切且半徑分別為 $\dfrac{r_0}{a}, \dfrac{r_0}{b}, \dfrac{r_0}{c}$ ，

(1)設圓 C_1 與圓 ***A***、圓 ***B***、圓 ***C*** 皆外切。若圓 C_n 與圓 ***A***、圓 ***B***、圓 C_{n-1} 皆外切（$n \geq 2$），

則圓 ***A***、圓 ***B*** 所夾區域中的公切圓 C_n 半徑

$$r_n = \frac{1}{(a+b)n^2+c+2n\sqrt{ab+ac+bc}} r_0 \text{ 。}$$

(2)設圓 D_1 與圓 ***A***、圓 ***B***、圓 ***C*** 皆外切。若圓 D_n 與圓 ***A***、圓 ***C***、圓 D_{n-1} 皆外切（$n \geq 2$），則圓 ***A***、圓 ***C*** 所夾區域中的公切圓 D_n 半徑

$$r_n = \frac{1}{(a+c)n^2+b+2n\sqrt{ab+ac+bc}} r_0 \text{ 。}$$

(3)設圓 E_1 與圓 ***A***、圓 ***B***、圓 ***C*** 皆外切。若圓 E_n 與圓 ***B***、圓 ***C***、圓 E_{n-1} 皆外切（$n \geq 2$），

則圓 ***B***、圓 ***C*** 所夾區域中的公切圓 E_n 半徑

$$r_n = \frac{1}{(b+c)n^2+a+2n\sqrt{ab+ac+bc}} r_0 \text{ 。}$$

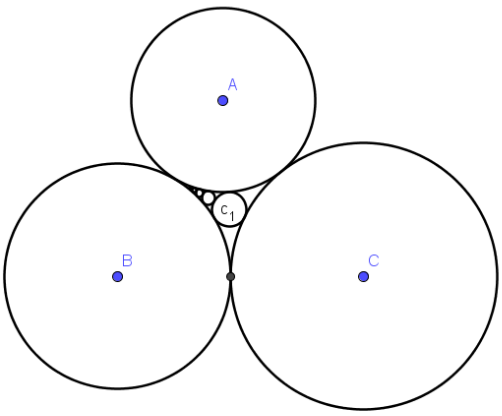


圖 11. 定理 3.6 示意圖：三圓兩兩外切且半徑皆不相等

事實上，定理 **3.1** 是定理 **3.4** 的特例；定理 **3.2** 是定理 **3.5** 的特例；而定理 **3.6** 則是最一般化的情況，前面許多定理都可以看成定理 **3.6** 的特例。

四、討論與未來研究展望

本研究從一道江戶時期數學家設計在算額上徵解的數學問題出發，先探求圖形中白圓與黑圓的半徑公式，並證明了本算額文提所給的公式。接著，改變圓之半徑比例再進行延伸推廣，在解原算額問題與延伸推廣 **1** 的過程，我們求得了白圓圓心所在的曲線為拋物線，但黑圓圓心所在曲線的圖形還沒求出來，這是未來努力的目標。

在延伸推廣 **2** 裡，給定三個兩兩外切的圓之半徑，我們先求得了三圓所夾區域中的外公切圓半徑，再仿照定理 **2.1** 與定理 **2.2** 的白圓、黑圓半徑通式，求得了圖形中一系列外公切圓的半徑通式：定理 **3.4**、定理 **3.5** 與定理 **3.6**。然而，我們尚未研究出這一系列公切圓的圓心落在什麼樣的曲線上。同時，圖形中還有其它造出一系列公切圓的方式，例如：給定兩兩外切的三圓，其內公切圓與任兩圓所夾區域中也可造出一系列公切圓，再探討這些圓的半徑通式。但受限篇幅與時間，未能在本研究中完成與呈現。

此外，我們也思考：算額問題中，還包含了各式各樣幾何圖形相切問題，因此，未來可以繼續研究正方形容切圓問題、正三角形容切圓問題，推廣至任意三角形與任意多邊形的容切圓問題。另外，本研究處理的都是平面上多圓相切問題，我們也好奇，是否可以推廣到空間幾何：給定四個兩兩外切的球的半徑，求他們的公切球半徑，進而仿照本研究，討論一系列公切球的半徑通式。

後記：本文內容主要參考改寫自朱紫瑄、程紘琪（**2018**），〈圓圓切切圓圓──多圓容切問題的探討與推廣〉，臺北市第 **51** 屆中小學科學展覽會。本文的圖為朱舢樺所繪。

參考文獻

黃俊瑋（**2018**），〈奉掛御寶前算額－累圓容切問題〉，《**HPM** 通訊》**21(6)**。

朱紫瑄、程紘琪（**2018**），〈圓圓切切圓圓──多圓容切問題的探討與推廣〉，臺北市第 **51** 屆中小學科學展覽會。

大衛．艾契森（**2013**），《掉進牛奶裡的 **e** 和玉米罐頭上的 **π**》，台北市：臉譜出版社。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/ ~ horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（銘傳國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中） 王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（龍岡國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
彰化市：林典蔚（彰化高中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！