HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（台北教育大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十二卷第三期目錄 2019 年 9 月

《數學文章寫作：基礎篇》導讀

洪萬生
臺灣數學史教育學會理事長
臺灣師範大學數學系退休教授

過去幾十年來，有志於數學普及的作者（絕大部分是擁有博雅素養的數學家）大都擔心抽象艱深的數學面貌或本質在「普及化」（或「通俗化」）之後，變得過度簡化甚至扭曲，而無法完成「普羅（化）大眾」的神聖使命！

不過，這種普及的焦慮顯然被日本普及數學作家結城浩（**Hiroshi Yuki**）徹底顛覆了。在《數學文章寫作》「基礎篇」及「推敲篇」兩書中，結城浩不斷強調：「許多讀者覺得我的文章『正確且容易閱讀』」。或許有人認為他的這些文章都屬於初等數學層次，既容易普及化又有不少書寫先例可循，根本不值得吹噓。事實上，他的「數學女孩系列」（除了第一本臺譯本書名稱為「數學少女」之外）主題依序從分拆數（**partition of number**）、費馬最後定理、哥德爾不完備定理、隨機演算法、伽羅瓦理論（**Galois theory**），到龐加萊猜想（**Poincare conjecture**），無一不是艱深抽象的理論，對普及化當然都是巨大挑戰，但他卻始終為高中生讀者著想，利用「數學小說」這個新文類（**genre**），以每書各十章目錄篇幅，深入淺出，就近取譬，而且首尾融貫，運用「正確且容易閱讀」的筆法，揮灑出令人折服的數學普及大塊文章。因此，日本數學學會在 **2014** 年將「出版賞」頒贈給他，表彰他對數學普及推廣的貢獻，堪稱實至名歸。尤其對他這位非數學專業、卻自詡「以寫作穿插數學式的文章為生」的作家來說，的確是莫大的殊榮。

在累積了深厚的普及書寫經驗之後，結城浩又進一步出版《數學文章寫作》的「基礎篇」及「推敲篇」。事實上，根據日文版出版資料，前者（亦即本書）於 **2013** 年出版第一刷，恰好是《數學女孩：伽羅瓦理論》問世（**2012** 年）後一年，當時顯然「因緣具足」，的確是他可以好好「現身說法」的時機。現在，我就針對本書，亦即《數學文章寫作：基礎篇》，提出我在審訂中譯稿之後的心得，聊供讀者談助之用。

根據結城浩的「夫子自道」，本書「討論了寫作正確且容易閱讀文章的原則」。而這項原則就是他一再強調的「為讀者著想」。這個他視同為指南針的原則，是他二十多年著書立說時，始終為他指出正確的方向。本書共有八章，各章主題依序如下：

(1) 目標讀者是誰？
(2) 體例格式及文章結構組成
(3) 建立順序與階層，統整文章內容
(4) 針對數學式子及命題，給予讀者理解線索的詮釋資料
(5) 例子之為用：「舉例為理解的試金石」
(6) 運用「問與答」的手法讓文章生動活潑
(7) 目錄與索引是重要的道具
(8) 唯一想要傳達的事情：為讀者著想

在這八章的架構中，結城浩還是延續他書寫「數學女孩系列」，甚至「數學女孩秘密筆記系列」的風格，為我們凸顯他那首尾一貫、前後呼應、就近取譬，以及層次分明的論述或敘事特色。就首尾一貫及前後呼應來說，第 1 章先指出目標讀者，然後，在第 8 章提出總結時，再三強調本書「唯一想要傳達的事情」，就是：「為讀者著想」。此外，他在第 7 章說明目錄的重要性時，就給了我們一個如何綜觀全書結構的比喻：

> **文章寫完後製作目錄，接著重新審視目錄吧。閱讀目錄，有助於寫出正確且容易閱讀的文章。跟讀者一樣，作者也可透過目錄掌握文章的輪廓。**
> **在閱讀目錄時，作者要化身為小鳥，飛翔在名為文章的廣大森林之上，俯瞰整篇文章的結構。**

事實上，這種力求掌握全局的進路（**approach**），完全是數學女孩系列書寫的自我實現，而這，當然也充分反映了結城浩的數學博雅品味。

再拿「就近取譬」來說，結城浩在本書第 5 章中，就列舉了典型的、極端的、不符合的、以及考慮讀者知識背景的各種（數學）例子。因此，在不應該炫耀作者自身才學的前提下，文章的說明與舉例必須要有「在地的」（**in context**）的對應或體貼才好。總之，本章論述可說是結城浩為自己的普及書寫進路，留下了忠實的註腳，因為他在「數學女孩（秘密筆記）系列」就一再呼籲：「**舉例為理解的試金石**」。

最後，我們介紹結城浩如何讓文章的「層次」得以「分明」。針對這個需要，他提供了本書第 2、3、6 章的篇幅，與讀者分享文章的格式如何與內容同樣重要，還有，作者如果善用問與答的對話形式，不僅文氣較易顯得生動活潑，書寫層次也順勢獲得釐清，這個現象在數學女孩（這一系列數學小說）的敘事情節中，就得到了充分的證實。事實上，「問與答」敘事如何有助於數學學習，這一系列數學小說也貢獻了忠實的見證，讀者可以自行覆按。

本書日文版到 **2017** 年 **12** 月為止，已有十刷的出版成績，足見它受到非常廣泛的重視。不過，我的推薦還必須連結到我們臺灣的教育現場。**2019** 年初，我應邀以「數學閱讀與寫作：新世紀的 **HPM** 使命」為題，在臺灣數學史教育學會（**Taiwan HPM**）成立會場上發表演講，呼籲數學閱讀與寫作的重要性。事實上，**108** 課綱中議題適切融入項目就納入「閱讀素養教育」。儘管此一目標並未明示（數學）寫作的重要性，但基於（美國）教育學者的研究，「寫作是跨科際的學習工具！寫作是衡量高階概念化、分析、應用、綜合與論證的手段」，可見，推動數學閱讀的教育效益，不如同時推動數學閱讀與寫作要來得大些！更何況 **2016** 年美國學術性向測驗（**SAT**）就在傳統閱讀測驗之外，要求「考生讀一段短文，然後寫一篇文章，分析其作者的意圖，並且要舉出嚴謹的證據來證明自己的觀點。」

因此，本書值得大力推薦！無論你是科普作家、教師或學生，本書都是數學寫作的最佳指南。尤其是數學教師，當你要帶領學生學習數學寫作時，本書所提供的精緻案例，在面對所謂的素養教學議題時，絕對不會讓你感到孤單。至於關心教改議題或國際教育評比 **PISA** 閱讀測驗的家長或一般讀者，則不妨將本書與任何一本數學普及書籍併而觀之，屆時你或可理解所謂的數學素養究竟是怎麼一回事了。

研究隨筆：富山縣射水市放生津八幡宮所藏算額

英家銘、吳韋霖
國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系

2019 年六、七月之交，本文的第一作者到日本北陸地區旅遊，順便也找機會造訪金澤、富山一帶可能收藏有算額的神社。這次北陸行收穫最多的拜訪，是發生在第一作者到富山縣射水市放生津八幡宮的時候。

圖 **1.** 富山縣射水市放生津八幡宮

日本北陸地區的富山縣，在古代律令制度之下是「越中國」。日本現在的年號「令和」，眾所周知出自和歌集《萬葉集》之中，而《萬葉集》其中一位重要的編者，以及這本和歌集中收錄的許多和歌的作者之一，是大伴家持（約 **718** 年-**785** 年）。大伴家持曾經擔任越中國的地方官「越中守」，在這裡也留下與多和歌，到今日還被富山縣的民眾紀念，而放生津八幡宮傳說即為大伴家持所創建。富山縣射水市是富山縣靠富山灣的港口小鎮，人口不多，第一作者前往放生津八幡宮的時候，還必須從無人車站下車後前往。所幸這座神社在當地算是重要的信仰中心之一，一年四季有各樣的儀式。第一作者去拜訪時，放生津八幡宮的「宮司」（神社中地位最高的神職人員）並沒有外出，所以第一作者得以向宮司自我介紹並請求拜見神社收藏的算額。互相認識之後，令我們驚訝的是，這位宮司的姓名為「大伴泰史」，至於他是否為大伴家持的子孫，我們就沒有深究。

圖 **2.** 本文第一作者與放生津八幡宮宮司大伴泰史先生合影

放生津八幡宮收藏的算額，是當地的關流算學家石黑信由於江戶時代中後期的 **1783** 年所奉納。不過可惜的是，根據大伴宮司所述，這面算額在二次大戰之後被偷走，已經不在神社中，目前神社所懸掛的是 **1967** 年復原奉納的複製品。

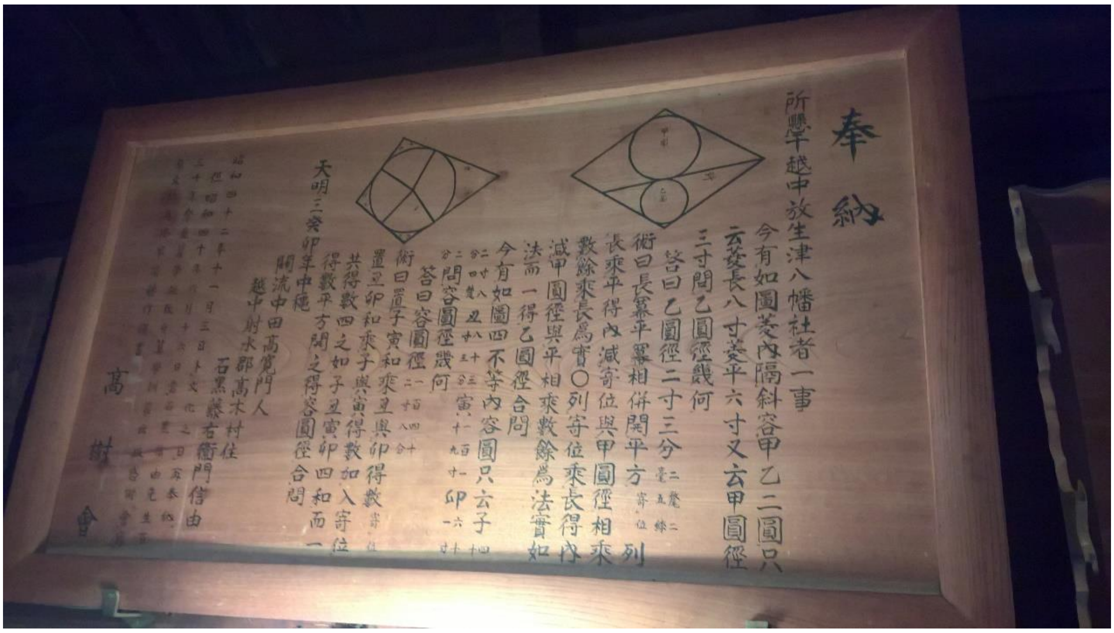

圖 **3.** 放生津八幡宮所藏算額（復原奉納）

這幅算額上有兩題不太容易解答的多邊形內切圓問題，但這類問題在其他的和算書或者算額上也不少見。大伴宮司說他很驚訝一位外國學者從臺灣特地跑到他們這個鄉下地方來看算額。作者的回答，除了說是旅遊順道拜訪之外，還有另外一個目的，就是去購買他們的「算額繪馬」。

各位讀者如果去日本旅遊，在神社或寺院常常會看到有在販賣被稱為「繪馬」的小

木片，可以在上面寫下自己的願望再掛到繪馬亭來向神明祈願。日本很多寺社都會推出各種造型圖案或者祈願功能不同的繪馬讓參觀者購買。某種程度來說，算額是一種古代的大型繪馬。但是，富山縣射水市放生津八幡宮有趣的地方，就是他們把算額當成一個賣點，將算額上的題目製作成繪馬販賣。筆者千里迢迢跑到那裡，除了拜見算額之外，更重要的目的是去購買他們的「算額繪馬」，因為這是筆者所知日本唯一將算額問題做成繪馬販賣的神社！

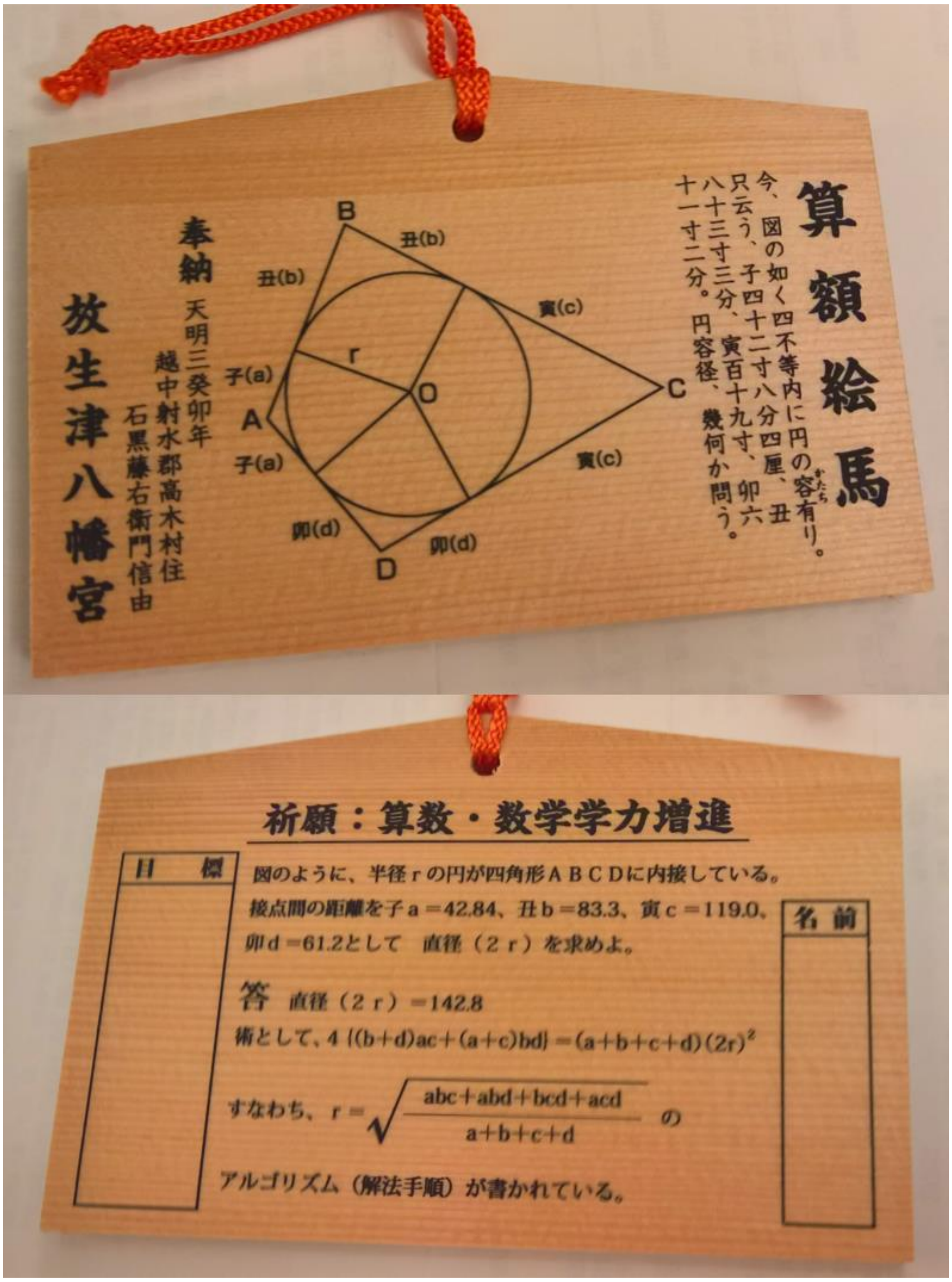

圖 **4.** 富山縣射水市放生津八幡宮算額繪馬

各位讀者可以從圖 **4** 中看到，這片繪馬的正面就是算額上的一個問題，背面是以現代符號書寫的解答。背面上方還註明可以做「算數、數學學力增進」的祈願，右邊寫上姓名，左邊可以寫數學學習或者考試的目標。

這面算額上的問題並不容易回答，以下的解答是本文第二作者參考研究資料解讀後整理而成。繪馬上的問題簡單來說，就是有一個四邊皆不相等的四邊形內切一個圓，給定四邊的長度，求內切圓的直徑。我們假設四個頂點到圓的切線段長分別為 ***a***、***b***、***c***、***d***，內切圓半徑為 ***r***，如圖 **5**。

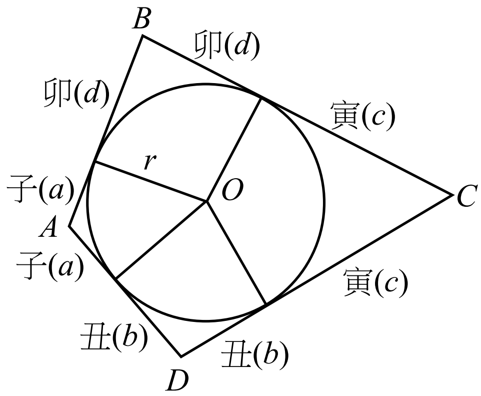

圖 5. 算額問題示意圖

如圖 **6**，連結連接 $\overline{BD}$ 與 $\overline{OA}$，設 $\angle OAB = \angle OAD = \alpha$，圓徑 $e = 2r$

則 $\dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD}} = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$。

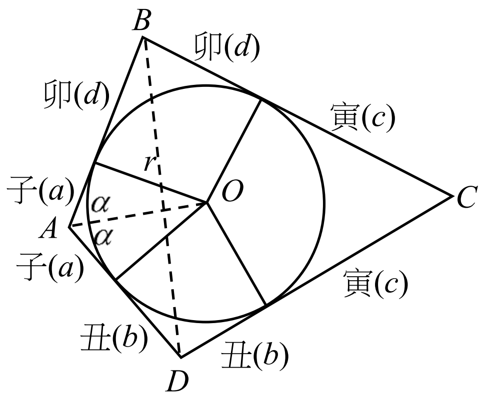

圖 6. 算額問題解答所需之輔助線

$$\because \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (\frac{e}{2})^2}} = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + e^2}}$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD}} = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{2a}{\sqrt{4a^2 + e^2}}\right)^2 - 1 = \frac{8a^2}{4a^2 + e^2} - 1$$

$$\Rightarrow \overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\frac{8a^2}{4a^2+e^2}=(\overline{AB}+\overline{AD})^2-\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\frac{16a^2}{4a^2+e^2}$$

同理：$\overline{BD}^2=(\overline{CB}+\overline{CD})^2-\overline{CB}\cdot\overline{CD}\cdot\dfrac{16c^2}{4c^2+e^2}$

$$\therefore(\overline{AB}+\overline{AD})^2-\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\frac{16a^2}{4a^2+e^2}=(\overline{CB}+\overline{CD})^2-\overline{CB}\cdot\overline{CD}\cdot\frac{16c^2}{4c^2+e^2}$$

$$\Rightarrow(\overline{AB}+\overline{AD})^2-(\overline{CB}+\overline{CD})^2=\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\frac{16a^2}{4a^2+e^2}-\overline{CB}\cdot\overline{CD}\cdot\frac{16c^2}{4c^2+e^2}$$

$$\Rightarrow(\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CB}+\overline{CD})(\overline{AB}+\overline{AD}-\overline{CB}-\overline{CD})=\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\frac{16a^2}{4a^2+e^2}-\overline{CB}\cdot\overline{CD}\cdot\frac{16c^2}{4c^2+e^2}$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c+d)(2a-2c)=(a+d)\cdot(a+b)\cdot\frac{16a^2}{4a^2+e^2}-(c+d)\cdot(c+b)\cdot\frac{16c^2}{4c^2+e^2}$$

$$\Rightarrow(a+b+c+d)(a-c)=(a+d)\cdot(a+b)\cdot\frac{4a^2}{4a^2+e^2}-(c+d)\cdot(c+b)\cdot\frac{4c^2}{4c^2+e^2}$$

$$\Rightarrow(a+b+c+d)(a-c)(4a^2+e^2)(4c^2+e^2)$$
$$=4a^2(a+d)\cdot(a+b)\cdot(4c^2+e^2)-4c^2(c+d)\cdot(c+b)\cdot(4a^2+e^2)$$

$$\Rightarrow(a+b+c+d)(a-c)e^4+(a+b+c+d)(a-c)e^2(4a^2+4c^2)+16a^2c^2(a+b+c+d)(a-c)$$
$$=16a^2c^2\left[(a+d)\cdot(a+b)-(c+d)\cdot(c+b)\right]+e^2\left[4a^2(a+d)\cdot(a+b)-4c^2(c+d)\cdot(c+b)\right]$$

$$\Rightarrow(a+b+c+d)(a-c)e^4+e^2\left[(a+b+c+d)(a-c)(4a^2+4c^2)-4a^2(a+d)\cdot(a+b)+4c^2(c+d)\cdot(c+b)\right]$$
$$+16a^2c^2\left[(a+b+c+d)(a-c)-(a+d)\cdot(a+b)+(c+d)\cdot(c+b)\right]=0$$

$$\because(a+b+c+d)(a-c)-(a+d)\cdot(a+b)+(c+d)\cdot(c+b)=0$$

$$\Rightarrow(a+b+c+d)(a-c)e^4$$
$$+e^2\left\{4a^2\left[(a+b+c+d)(a-c)-(a+d)\cdot(a+b)\right]+4c^2\left[(a+b+c+d)(a-c)+(c+d)\cdot(c+b)\right]\right\}=0$$

$$\Rightarrow(a+b+c+d)(a-c)e^2+4\left\{a^2\left[-(c+d)\cdot(c+b)\right]+c^2\left[(a+d)\cdot(a+b)\right]\right\}=0$$

$$\Rightarrow(a+b+c+d)(a-c)e^2-4\left[a^2(bc+cd+bd)-c^2(ab+ad+bd)\right]=0$$

$$\Rightarrow(a+b+c+d)(a-c)e^2-4\left[abc(a-c)+acd(a-c)+bd(a^2-c^2)\right]=0$$

$$\Rightarrow(a+b+c+d)e^2-4\left[abc+acd+bd(a+c)\right]=0$$

$$\Rightarrow(a+b+c+d)e^2-4\left[abc+abd+bcd+acd\right]=0$$

$$\Rightarrow (a+b+c+d)(2r)^2 - 4\left[abc+abd+bcd+acd\right] = 0$$

$$\Rightarrow 2r = 2\sqrt{\frac{abc+abd+bcd+acd}{a+b+c+d}} = 142.8$$

最後一步我們就是將數值代入，得到內切圓直徑長為一百四十二寸八分。

誰說數學不能文創？做得好還會有人千里迢迢跑去買。

參考文獻：

中村信弥（**2008**），《和算の図形公式-『算法助術』》，電子復刻版。
http://www.wasan.earth.linkclub.com/kosiki/kosiki.html

網路資源：

放生津八幡宮首頁：**https://www.houjyoudu.com/new-page-c246v**

《數學起源：進入古代數學家的另類思考》讀書心得

廖傑成
國立臺灣師範大學數學系博士班

望眼欲穿 **HPM (History and Pedagogy of Mathematics)** 的大作《數學起源》**(*The Historical Roots of Elementary Mathematics*)** 總算有中譯版了，本書在介紹古埃及乃至古希臘的數學緣由，不若其他數學普及著作，作者深入的介紹每個古文化使用的數學元素與其可能的想法，更重要的，在每一小節還提供數道練習題，供讀者練習，以加深印象，這些練習題除了概念得確認外，還有額外的延伸問題，對於數學的鑒往知來有很大的裨益。

本書一共有八章：恰好可將第一至四章分成上部分，五到八章歸為下部分，為何可以這樣說呢。因為從第五章起作者將古希臘的哲學先聖們引入，並提出概念的想法，為之後公理化的幾何原本開了一條道路。而前兩章介紹的古埃及與巴比倫的四則運算方法，則為最後一章代數學的體 **(field)** 鋪陳，讓本書有了畫龍點睛之妙。底下即對每一章作簡短的介紹。

第一章介紹埃及數學

除了介紹埃及數字的表達法外，在四則運算上，比較特別的是乘法與除法，關於乘法古埃及人將被除數以 **2** 的冪級數表示，再利用分配律來處理。以 237×18 為例，$237=128+64+32+8+4+1$，換言之

$$237\times18=(128+64+32+8+4+1)\times18$$

$$=128\times18+64\times18+32\times18+8\times18+4\times18+1\times18$$

而古埃及人會寫作

\	**1**	**18**
	2	**36**
\	**4**	**72**
\	**8**	**144**
	16	**288**
\	**32**	**576**
\	**64**	**1152**
\	**<u>128</u>**	**<u>2304</u>**
	237	**4266**

左方有「\」記號的數字要加起來。

這樣的算法與現代俄羅斯農夫法有異曲同工之妙，這種乘法結合了加倍法與分半法，以 83×154 為例：

$$83=1+82=1+2\times41=1+2\times(1+40)=1+2\times1+2\times40=1+2\times1+4\times20$$

$$=1+2\times1+8\times10=1+2\times1+16\times5=1+2\times1+16\times(1+4)$$

$$=1+2\times1+16\times1+16\times4=1+2\times1+16\times1+32\times2=1+2\times1+16\times1+64\times1$$

換言之

$$83\times154=(1+2\times1+16\times1+64\times1)\times154$$

$$=1\times154+2\times154+16\times154+64\times154$$

而俄羅斯農夫法會寫作

83	×	**154**	/
41	×	**308**	/
20	×	**616**	
10	×	**1232**	
5	×	**2464**	/
2	×	**4928**	
1	×	**9856**	/

右方有「/」記號的數字要加起來。**41** 是 **83** 的一半取較小的，**2** 是 **5** 的一半取較小的。

關於除法，古埃及人採用單位分數的表達法，即將分數表示為分子是 **1** 的分數，以 $19\div8$ 為例(出自《萊茵德紙草書》問題 **24**)

$$19=8\times2+3=8\times2+8\times\frac{1}{4}+1=8\times2+8\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{8}$$

因此 $19\div8=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

古埃及人會寫作

	1	**8**
\	**2**	**16**
	$\bar{2}$	**4**
\	$\bar{4}$	**2**
\	$\bar{8}$	**1**
	和	**19**

古埃及人的乘法除法使用了 **2** 進位的想法，在運算上倒是頗精緻的，左邊做了 **2** 進位的分解，右邊則是一直採用乘以 **2** 或除以 **2** 的運算。雖然現在我們是直接採用 **10** 進位的乘除法，但是弄懂古埃及人的思考，對於分配律的概念有更上一層的體悟。

而在代數問題上，古埃及人採用了單設法(**method of single false position**)來解決問題，例如底下的問題，一個數，和它的七分之一加起來等於 **19**，那麼這個數是多少？先假設答案是 **7**，則 $7+\frac{1}{7}\times7=8$ ，又 $19\div8=2\frac{3}{8}=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ ，某數為

$7\times 2\frac{3}{8}=16\frac{5}{8}=16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$，以現代觀點來看單設法在解決 $ax=b$ 的問題，這個題目可以看做 $\frac{8}{7}x=19$，先將 $x=7$ 代入，但是方程式變為 $\frac{8}{7}\cdot 7=8\neq 19$，同時若將方程式除以 **8**，則式子變為 $\frac{1}{7}x=\frac{19}{8}=2\frac{3}{8}$，換言之，$x=2\frac{3}{8}\times 7=16\frac{5}{8}$。事實上某數不一定要取 $x=7$ 代入，將其他數字代入也是可以的，但是取 $x=7$ 可以避免產生分數，導致增加冗長的運算。

除了單設法外，還有雙設法 **(method of double false position)**，在中國古代數學歸入盈不足術中，簡單說起來就是要解 $ax+b=c$ 的問題，一樣是先假設兩個數字代入，再利用類似插值的原理，去推估原來的答案。對於初看到單設法的讀者，或許會覺得很奇怪，為何要先代入另一個不是答案的數字去做，不過若是理解當時還沒有符號代術的操作時，古埃及人會這樣想或許就更能釋懷了。更何況當我們碰到問題時，一開始應該也是利用數字代代看，看會發生什麼結果，除了試試運氣外，也可以藉由這樣的過程確認自己是否弄清楚題目所問。

第二章介紹巴比倫數學

巴比倫最有名的當屬六十進位的系統，他們除了會解二元聯立方程外，巴比倫人在解一元二次方程式，其做法也有一些巧思，舉例來說，解 $x^2+6x=16$。其解題過程以現代表示法如下：$x(x+6)=16$，令 $x+6=y$，改求 $xy=16$ 的問題，改令 $y=a+3$ 與 $x=a-3$，則可得

$(a+3)(a-3)=16$，即 $a^2-9=16$，可得 $a=5$，即還原 $x=2$。

第三章介紹希臘數學的開端

除了介紹特殊的希臘技術系統外，本章特別介紹泰利斯**(Thales 600 BC)**，因為他致力於尋求幾何定理的邏輯基礎，並且是將圖形的性質構成一般性敘述的數學家。另外，古希臘數學必定少不了畢達哥拉斯，畢氏學派將數當作所有自然科學的基礎。有一個故事這樣敘述的，當畢達哥拉斯經過鐵匠鋪時，發現敲打在鐵砧上的不同鐵槌，居然能形成完全不同的音階。他檢驗了是否施打者力道的問題，但確定與大小力無關後，他請鐵匠讓他測量這些鐵槌的重量，發現其重量的比例為 **6**，**8**，**9**，**12**，也因此確定了音階與數的關係。而且這四個數字似乎也不只與音樂上的和諧有關，因為對 **9** 來說，**6** 與 **12** 恰為算術平均數**(arithmetic mean)**，而 **8** 則是 **6** 和 **12** 的調和平均數**(harmonic mean)**。即

$9=\frac{6+12}{2}$；$\frac{1}{8}=\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}{2}$。而就比例來說，$\frac{6}{8}=\frac{9}{12}$，也可表示成 $\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$。在音樂的意義則是長度 **12** 與 **9** 的弦線，與長度 **8** 和 **6** 的弦線都可以產生一個音即另外一個高四度的音；而 **12** 與 **8** 及 **9** 與 **6** 的弦線可以產生一個音即另外一個高五度的音。另外，畢氏學派定義算術平均數是以算術平均數大於第一個數的量，與第二個數大於算術平均數的量相等來規

定，即$9-6=12-9$。而調和平均數則是以調和平均數與第一個數的差除以第二個數與調和平均數的差所得的值，與第一個數除以第二個數的值相等來規定，即$\frac{8-6}{12-8}=\frac{6}{12}$。至於幾何平均數 **(geometric mean)** 則是以第一個數與幾何平均數的差除以第二個數與幾何平均數的差所得的值，與第一個數除以幾何平均數的值相等來規定，例如$\frac{6-2}{18-6}=\frac{2}{6}$。除此之外，**6**，**8**，**12** 這三個數在幾何上也有它們的蹤跡，例如，一個立方體有 **6** 個面，**8** 個頂點，**12** 個邊，按照畢氏學派的說法，他們稱立方體為調和體 **(harmonic body)**。

這裡提到的 **6**，**8**，**9**，**12** 這四個數字是很微妙的，若不是藉由作者所寫，平常是沒有想到這些關聯，而且還可以跟算術平均數與調和平均數做關聯。除此之外，按照古希臘人對於算術平均數，幾何平均數，調和平均數的定義，初次看見還是覺得神奇，雖然與現代的定義是等價的，不過也許古代的想法才是比較合理的，現代反而是藉由整理後才定下。

圖形數 **(figurate numbers)** 是畢氏學派人最擅長的領域，而平方數與畢氏三元數存在一種有趣的相互關係。因為$(n+1)^2=n^2+(2n+1)$，若將$2n+1=m^2$代入，則可得

$n=\frac{m^2-1}{2}$，$n+1=\frac{m^2+1}{2}$，原本的恆等式則變為$\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2+m^2$，將 ***m*** 以奇數代入，即為畢氏三元數。

利用$(n+1)^2=n^2+(2n+1)$這個等式推廣到畢氏三元數是頗新穎的想法，一般看到$(n+1)^2$，大概就只是展開，而並未不會再次加工，更沒有有去聯想畢氏定理。不過圖形數與圖說證明**(proofs without words)**有很密切的關聯，在計算級數和或是一些組合定理，適當的圖形或想法往往會讓人有啊哈 **(A HA)** 的想法，豁然開朗。

不過，提到畢氏學派必定要提不可公度量 **(incommensurable)** 這一個概念，亦即在利用畢氏定理計算正方形對角線時，畢氏學派發現對角線無法利用簡單的整數比來表示，按照現代的說法稱其為無理數。這與畢氏學派的理念，萬物本質都可以化約為自然數互相駁斥，因此，無理數的發現對於畢達哥拉斯的哲學而言，無疑是一個大災難。

就現代學子學習$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$這些無理數時，似乎也就理所當然的接受它了。像畢氏學派這般發現無法以簡單整數比所表達的數，採行保守祕密的決定，就現在來看實在難以想像。或許一個數要能恰如其分的獲得一個自己可以安身立命的位置，是需要時間與環境

的配合。不過在說到$\sqrt{2}$這樣的數時，一時間還是無法掌握，例如：我們總是很能體會要 **1** 瓶水或是兩瓶水，但是若是有人說要$\sqrt{2}$瓶水時，那到底是比 **1** 瓶水多還是比 **2** 瓶水多呢？又跟他們大約差多少呢？這些感覺總是要細細思量後才會有恍然大悟的感受。

第四章 介紹古希臘的著名問題

本章主要在介紹古希臘三不可能問題，也就是「倍立方」、「三等分任意角」、「化圓為方」，嚴格說起來，應該是以尺規作圖這三類問題不可能完成。先是希波柯拉堤斯 **(Hippocrates of Chios 460-380 BC)** 以新月形化為正方形，開啟希望能「化圓為方」的可能。而在「倍立方」方面，相傳與德羅島 **(Island of Delos)** 的阿波羅 **(Apolle)** 神諭有關，阿波羅命令島民將他們建造的立方祭壇之體積擴增為兩倍，而形狀仍需維持為正立方體。島民嘗試許久未果，因此將此問題請教柏拉圖，柏拉圖答道阿波羅並非真的要建造兩倍大的祭壇，而是要強調數學的重要性。事實上若拋開尺規作圖的限制，古希臘人利用其他曲線或其他工具，他們發現了幾種不同的答案。梅內克謬斯 **(Menaechmus 350 BC)** 利用拋物線與雙曲線解決了倍立方問題，而柏拉圖利用二刻尺解決。附帶一提，梅內克謬斯就是亞歷山大的私人教師，為了回答皇室學生詢問學習幾何的捷徑，他說了一段名言：「對任何人來說，學好幾何學就只有一條道路。」

至於「三等分任意角」的問題，阿基米德 **(Archimedes 287-212 BC)** 與尼科梅德斯 **(Nicomedes 240 BC)** 皆利用了尼科梅德斯蚌線 **(conchoid of Nicomedes)** 的性質，跳脫尺規作圖的限制來完成三等分任意角。

學習尺規作圖時總會有底下幾種感受。第一，尺規作圖實在厲害，幾乎所有圖都可以畫。第二，好像也只能按照前人的腳步學習。第三，我一定可以藉由尺規作圖的方式畫出任意的圖形，我畫不出來只是當下的問題，在多一點時間，多一點思考，或是一定前人已經畫出來了，只待我去尋找。本章就是給學習尺規作圖者一個警告，尺規作圖有它的限制，不是什麼條件都可以做出來。不過阿基米德，尼科梅德斯，梅內克謬斯，這些先賢們倒是另闢蹊徑的跳脫尺規的限制，畫出「倍立方」、「三等分任意角」等問題。

第五章介紹歐幾里得的哲學先驅

本章從古希臘的哲學家們所考量的邏輯脈絡，逐步為數學的公理化演繹系統鋪路，在此要特別提出柏拉圖記錄了他的老師蘇格拉底與男孩的對話，而寫下了米諾篇說起。

蘇格拉底：孩子，你知道正方形是這樣的形狀嗎？男孩：我知道。
蘇格拉底：四個邊是否都等長？男孩：沒錯。
蘇格拉底：對邊中點的連線是否也等長？男孩：是的。
蘇格拉底：這樣的圖形大小可以改變的，對嗎？男孩：對。
蘇格拉底：如果這個正方形的邊長是 **2** 英尺，整個面積為是多少？這麼說吧，如果一邊

長 **2** 英尺，另一邊長只有 **1** 英尺，面積是不適 **2** 平方英尺？ 男孩：是。

蘇格拉底：既然現在兩邊都是 **2** 英尺，面積就會是 **2** 平方英尺的 **2** 倍囉？男孩：對的。

蘇格拉底：算算 **2** 平方英尺的 **2** 倍是多少？男孩：四平方英尺。

蘇格拉底：那麼，你能畫一個相似的圖形，四個邊等長，但面積卻是 **ABCD** 面積的兩

倍嗎？

男孩：可以。

蘇格拉底：這個圖形的面積會是多少？男孩：八平方英尺。

蘇格拉底：告訴我它的邊長應該是多少。原來的圖形邊長是 **2** 英尺，面積變成 **2** 倍的新

圖形邊長是多少？男孩：很明顯啊，是原圖形邊長的兩倍。

柏拉圖的這篇對話錄，並不是為了要發展數學知識，而是要發展哲學信念，即教學的目的，是為了要喚醒學生心靈的記憶。順著柏拉圖的腳步，亞里斯多德發展了概念與定義。

第六章介紹歐幾里得

按照公理體系歐幾里得 **(Euclid 300 BC)** 成功的架構了數學史上第一部公理系統的著作幾何原本 **(*Elements*)**，往後的數學著作都以本書為標竿，依公理體系闡述學問。

第七章介紹後歐幾里得時代的希臘數學

本章在介紹歐幾里得之後的希臘數學的發展，先是阿基米德在面積、體積及重心理論，還證明了球體體積等於球的外切圓柱體積減去內接於該圓柱的圓錐體積，還有一些機械滑輪的裝置，並利用正九十六邊形逼近圓周率。而埃拉托斯特尼 **(Eratosthenes 230 BC)** 以測量地球周長聞名，另外埃拉托斯特篩法則是尋找質數的簡單方法。阿波羅尼亞斯 **(Apollonius 225 BC)** 則在圓錐曲線上取得重大的突破。至於海龍 **(Heron 75? BC)** 的三角形面積公式可能源於阿基米德，但是其證明方法卻是目前所發現最古老的一個。丟番圖 **(Diophantus of Alexandria 250? BC)** 則留下《數論》**(*Arithmetica*)** 傳世。托勒密 **(Ptolemy 150 BC)** 利用它的托勒密定理建構了弦表，並完成了天文學的大作《天文學大成》**(*Almagest*)**。亞力山卓**(Alexandria)** 最後一位偉大的數學家是帕布斯 **(Pappus 320 BC)**，它以帕布斯定理聞名，而其主要作品被稱為《數學匯編》**(*Collection*)**。最後大衛‧希爾伯特 **(David Hilbert 1862-1944)** 在其著作《幾何的基礎》**(*Foundations of Geometry*)** 以純演繹的方式建構了幾何學。

第八章介紹後希臘時期的技術系統與算術

希臘之後遭受羅馬人，阿拉伯人，西歐人統治，但文化並未因此遭到破壞，在數學上先是有羅馬數碼，還有算盤及有形的算術，接下來有阿拉伯數碼。而本章的最後作者介紹了皮亞諾 **(Giuseppe Peano, 1858-1932)** 的自然數公設，及現代代數結構的體 **(field)**，並以加法與乘法在體 **(field)** 上的結構，呼應了本書的主題。

閱讀完本書，每一章都可以自成一個體系的供教學上使用，而作者除了提供豐富的參考資料外，一直到最後都不斷的與現代的數學體系做結合，時時提醒讀者不要將古時候的數學知識與現代數學切割，數學是一步一步累積起來的，現代數學的面貌，是由過去哪些地方轉變而成。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/ ~ horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》聯絡員

日本：**陳昭蓉** (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：**許文璋**（銘傳國中）
台北市：**楊淑芬**（松山高中）**杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍**（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中）**陳啟文**（中山女高）**蘇惠玉**（西松高中）**蕭文俊**（中崙高中）
郭慶章（建國中學）**李秀卿**（景美女中）**王錫熙**（三民國中）**謝佩珍、葉和文**（百齡高中）
彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）**郭守德**（大安高工）**張瑄芳**（永春高中）**張美玲**（景興國中）
文宏元（金歐女中）**林裕意**（開平中學）**林壽福、吳如皓** (興雅國中) **傅聖國**（健康國小）
李素幸（雙園國中）**程麗娟**（民生國中）**林美杏**（中正國中）**朱賡忠**（建成國中）**吳宛柔**（東湖國中） **王裕仁**（木柵高工）**蘇之凡**（內湖高工）
新北市：**顏志成**（新莊高中） **陳鳳珠**（中正國中）**黃清揚**（福和國中）**董芳成**（海山高中）**孫梅茵**（海山高工）**周宗奎**（清水中學）**莊嘉玲**（林口高中）**王鼎勳、吳建任**（樹林中學）**陳玉芬**（明德高中）**羅春暉** (二重國小) **賴素貞**（瑞芳高工）**楊淑玲**（義學國中）**林建宏** （丹鳳國中）**莊耀仁**（溪崑國中）、**廖傑成**（錦和高中）
宜蘭縣：**陳敏皓**（蘭陽女中）**吳秉鴻**（國華國中）**林肯輝**（羅東國中）**林宜靜**（羅東高中）
桃園市：**許雪珍、葉吉海**（陽明高中）**王文珮**（青溪國中） **陳威南**（平鎮中學）
洪宜亭、郭志輝（內壢高中） **鐘啟哲**（武漢國中）**徐梅芳**（新坡國中） **程和欽** (大園國際高中)、**鍾秀瓏**（龍岡國中）**陳春廷**（楊光國民中小學）**王瑜君**（桃園國中）
新竹市：**李俊坤**（新竹高中）、**洪正川**（新竹高商）
新竹縣：**陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷**（竹北高中）
苗栗縣：**廖淑芳** (照南國中)
台中市：**阮錫琦**（西苑高中）、**林芳羽**（大里高中）、**洪秀敏**（豐原高中）、**李傑霖、賴信志、陳姿研**（台中女中）、**莊佳維**（成功國中）、**李建勳**（萬和國中）
彰化市：**林典蔚**（彰化高中）
南投縣：**洪誌陽**（普台高中）
嘉義市：**謝三寶**（嘉義高工）**郭夢瑤**（嘉義高中）
台南市：**林倉億**（台南一中）**黃哲男、洪士薰、廖婉雅**（台南女中）**劉天祥、邱靜如**（台南二中）**張靖宜**（後甲國中）**李奕瑩**（建興國中）、**李建宗**（北門高工）**林旻志**（歸仁國中）、**劉雅茵**（台南科學園區實驗中學）
高雄市：**廖惠儀**（大仁國中）**歐士福**（前金國中）**林義強**（高雄女中）
屏東縣：**陳冠良**（枋寮高中）**楊瓊茹**（屏東高中）**黃俊才**（中正國中）
澎湖縣：**何嘉祥 林玉芬**（馬公高中）
金門：**楊玉星**（金城中學）**張復凱**（金門高中）　**馬祖：王連發**（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！