HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（台北教育大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十三卷第二期目錄（2020 年 6 月）

說算談天話論證：說算者的故事怎麼說？～(二)

洪萬生

臺灣數學史教育學會理事長/台灣師範大學數學系退休教授

(承上期)

四、趙爽與談天者

在《周髀算經》注序中，趙爽（字君卿）自謙「才學淺昧」，但由於「鄰高山之仰止，慕景行之軌轍」，於是，「負薪餘日，聊觀《周髀》，其旨約而遠，其言曲而中，將恐廢替，濡滯不通，使談天者無所取則。輒依經為圖，誠冀頹毀重仞之墻，披露堂室之奧。庶博物君子時迥思焉。」

可見，趙爽的註解是為了幫助「談天者」有所取則，不過，「負薪餘日，聊觀《周髀》」的自白卻也引人好奇。這位負薪的「勞動者」為何閒暇時會有興趣或能力「聊觀《周髀》」這部算經呢？在以吏為師的歷史環境中，他的天文學學養很有可能是出自學室的訓練，正如他同時代的說算者劉徽「幼習《九章》」一樣，從小就學習相關知識。而當他註解《周髀算經》時，或許就像擁有《筭數書》的墓主一樣，被免官或退休，而過著閒雲野鶴的日子。

《周髀算經》作者不詳，成書大約在公元前 **100** 年左右，是一部依據蓋天說宇宙論而立算的數理天文學經典，儘管現代史家認為它有多處片段，譬如本節下文將要引述的榮子與陳方之對話，乃是撮編而成。儘管如此，這一段對話卻極有可能是為秦漢談天者在學室中的學習活動，提供了極為生動的情節。榮方或許就是一位「少吏」（學徒），他向「長吏」陳子學習天文：

> 昔者榮方問於陳子。曰：「今者竊聞夫子之道。知日之高大，光之所照，一日所行，遠近之數。人所望見，四極之窮，列星之宿，天地之廣袤。夫子之道皆能知之，其信有之乎？」陳子曰：「然。」榮方曰：「方雖不省，願夫子幸而說之。若方者可教此道耶？」陳子曰：「然。此皆算術之所及。子之於算，足以知此矣。若誠累思

之。」

在這一段對話，陳子指出：算術可用以理解「**四極之窮，列星之宿，天地之廣袤**」等天文現象。而且，陳子也鼓勵榮方：「**子之於算，足以知此**」，要緊的莫過於「**累思之**」。

> **於是，榮方歸而思之，數日不能得。復見陳子曰：「方思之不能得，敢請問之。」陳子曰：「思之未熟。此亦望遠起高之術，而子不能得，則子之於數未能通類也。是智有所不及，而神有所窮。夫道術，言約而用博者，智類之明。問一類而以萬事達者，謂之知道。算數之術，是用智矣，而尚有所難，是子之智類單。夫道術所以難通者，既學矣，患其不博。既博矣，患其不習。既習矣，患其不能知。故同術相學，同事相觀，此列士之遇智，賢不肖之所分。是故能類以合類，此賢者業精習智之質也。夫學同業而不能入神者，此不肖無智而業不能精習，是故算不能精習。吾豈以道隱子哉？故復熟思之。**

看起來，光是「**累思**」還是不夠，「**不能得**」的原因在於「**未能通類**」。於是，陳子進一步指出：學習「**算數之術**」還是要講究方法，「**智類單**」是行不通的，一定要能「**類以合類**」，才能達到「**精習**」的境界。

> **榮方復歸，思之數日不能得。復見陳子曰：「方思之以精熟矣，智有所不及，而神有所窮，知不能得，願終請說之。」陳子曰：「復坐，吾語汝。」於是榮方復坐而請。陳子說之曰 ……**

總之，從上引文字來看（可另參考趙爽的註解），相對於「說算」的「硬功夫」，「談天」比較像「軟道理」。或許正因為如此，陳子才一再地誘導榮方「累思之」，進而「**類以合類**」。另一方面，儘管此一對話一開始不無涉及天文活動，然而，「談天者」陳子的論述主要聚焦在學習的一般性原則。這跟劉徽所引述的「說算者」之知識活動，確有極大的不同。後者是下一節的主題。

五、說算者的直觀論證

前文提及的「說算者」出現於劉徽針對《九章算術》第五章商功「方亭」體積公式的註解。茲先將此一問題、答曰、體積公式（術曰）及劉徽注引述如下，以方便後文討論：

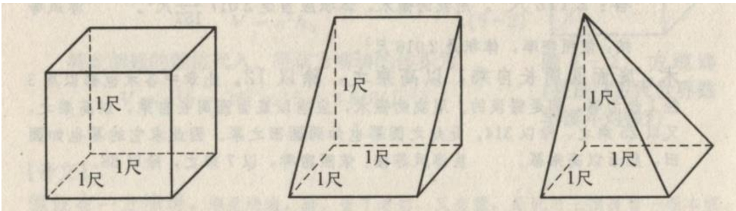
> **今有方亭，下方五丈，上方四丈，高五丈。問積幾何？**
> **答曰：一十萬一千六百六十六尺太半尺。**
> **術曰：上、下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一。**

按：方亭或稱方台，是一種截頂方錐體，上下底都是正方形，形如圖二左上。此處上方、下方是指上下兩個正方形的邊。

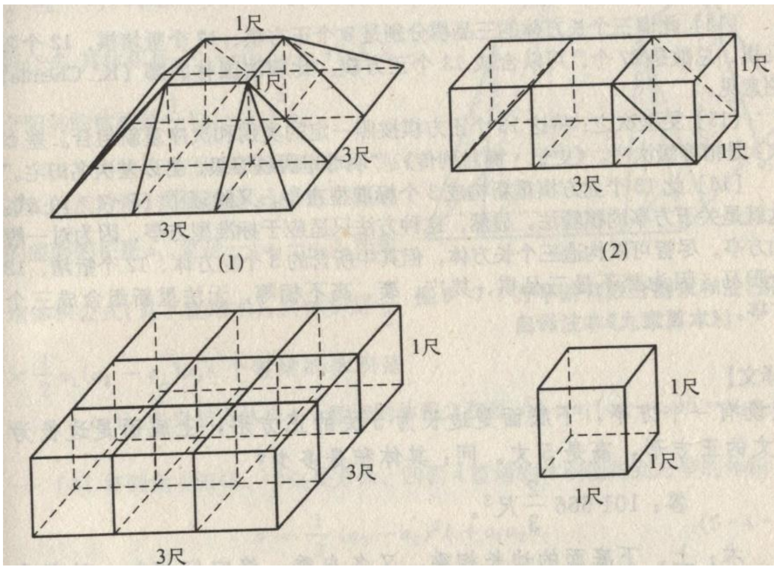
至於劉徽的註解則如下：

此章有塹堵、陽馬，皆合而成立方，蓋說算者乃立棊三品，以效高深之積。假令方亭，上方一尺，下方三尺，高一尺。其用棊也，中央立方一，四面塹堵四，四角陽馬四。上、下方相乘為三尺，以高乘之，約積三尺，是為得中央立方一，四面塹堵各一。下方自乘為九，以高乘之，得積九尺，是為中央立方一，四面塹堵各二，四角陽馬各三也。上方自乘，以高乘之，得積一尺，又為中央立方一。凡三品棊皆一而為三。故三而一，得積尺。用棊之數：立方三，塹堵、陽馬各十二，凡二十七，棊十三。更差次之，而成方亭者三，驗矣。

劉徽指出：過去的「說算者」利用三個標準的立體（稱為「三品棊」）立方、塹堵及陽馬，如圖一所示，其廣（或長）、袤（或寬）、高都等於一尺（或一個單位），其體積關係如下：一立方＝兩塹堵，一立方＝三陽馬，「為的就是推證以高深形成的立體體積」（**以效高、深之積**）。正如前述，本題所求體積是針對方亭（或稱方台）–一種截頂方錐（如圖二左上圖）。說算者運用三品棊的疊合拼湊，亦即所謂的「棊驗法」，來證明此一體積公式無誤。



圖一：說算者的三品棊：立方、塹堵及陽馬



圖二：說算者的論證圖示（劉徽轉述）

為此，說算者考慮一個上方＝一尺，下方＝三尺，高＝一尺的方亭特例，將它分割成三品棊的組合。在圖二左上圖中，我們可以發現到「**其用棊也，中央立方一，四面塹**

堵四，四角陽馬四」，亦即，這個方亭可以分割成（**中央**）**一個立方**（此處指「正立方體」，下同）、（**四邊有**）**四個塹堵**，（**四角有**）**四個陽馬**。現在，此公式的第一部分「**上、下方相乘為三尺，以高乘之**」的體積等於三尺，[1]相當於三個立方（棊），如圖二右上圖所示。這個立體可以運用一個立方（棊）及四個塹堵（棊）來拼湊組合。其次，考慮第二部分「**下方自乘為九，以高乘之，得積九尺**」，亦即得到體積＝九尺。這個立體（參見圖二左下圖）等於九個立方（棊）的組合，也可以等於（中央）一個立方（棊），再加上四面各有兩個塹堵（棊），以及四角各有三個陽馬（棊）。最後，第三部分「**上方自乘，以高乘之，得積一尺，又為中央立方一**」，就等於一個立方（棊）。如此一來，「凡是三品（棊），一個都變成了三個，所以除以三。」將這三部分各自品類相加，再除以三，得證：

方亭體積＝(1/3)（中央立方 3 個＋塹堵 12 個＋陽馬 12 個）
＝（中央）立方 1 個＋塹堵 4 個＋陽馬 4 個
＝「上、下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一」

圖三模型出自彭良禎的創作，其中包括六個鱉臑，都是由立方（正立方體，長、寬、高都相等）所切割而得。顯然，兩個鱉臑可拼成一個陽馬，一個陽 馬及一個鱉臑（亦即三個鱉臑）可拼成一個塹堵，兩個塹堵或三個陽馬都可拼成一個立方。不過，一旦立方的長（廣）、寬（袤）、高不等，亦即，此時「立方」是一個長方體，那麼，利用由此長方體所切割的三品棊，就無法運用

圖三：塹堵、陽馬及鱉臑模型

直觀拼湊來證明陽馬體積公式了，所有這些實際操弄模型的不可能，劉徽在「陽馬術」註解中都有說明。請先引述「陽馬術」問題、答曰及術曰如下：

今有陽馬，廣五尺，袤七尺，高八尺。問積幾何？
答曰：九十三尺少半尺。

[1] 此處「立方」是指因次，三尺＝**3** 立方尺。以下類同。

術曰：廣、袤相乘，以高乘之，三而一。

按：「少半尺」即三分之一尺。劉徽在他的註解中，先考慮特例（「廣、袤、高」或「長、寬、高」各一尺的情況）及其模型拼湊：

假令廣、袤各一尺，高一尺，相乘之，得立方積一尺。邪解立方得兩塹堵，邪解塹堵，其一為陽馬，一為鼈臑（參考圖三右上），陽馬居二，鼈臑居一，不易之率也。合兩鼈臑成一陽馬（參考圖三左上），合三陽馬而成一立方，故三而一。驗之以棊，其形露矣。奚割陽馬，凡為六鼈臑。觀其割分，則體勢互通，蓋易了也。

如果配合圖三模型操弄來閱讀，上述這一段文字應該很容易理解（易了也）才是。不過，這顯然是說算者的直觀論證。緊接著，劉徽針對一般情況（廣、袤、高不等）進行論證。他說：

其棊或脩短、或廣狹，立方不等者，亦割分以為六鼈臑。其棊不悉相似，然見數同，積實均也。鼈臑殊形，陽馬異體。然陽馬異體，則不可純合，不純合，則難之矣。

顯然，在這種「立方不等」（比如「或脩短、或廣狹」的長方體）的情況下，所「割分」出來的鼈臑就無法「純合」，從而無法按直觀論證進路，來證明陽馬體積公式。這或許也可以解釋何以劉徽在「陽馬術」註解最後指出：要想證明一般的陽馬（長、寬、高不等）體積公式，使用計算工具 -- 籌算也使不上力，而只能運用極限概念（數而求窮之者）並施之以「情推」（抽象論證）的進路了。

六、「類以合類」或「事類相推」

從上兩節引述的文字來看，相對於「說算」的「硬功夫」（第五節），「談天」比較像「軟道理」（第四節），或許正因為如此，陳子才一再地誘導榮方「累思之」，並進一步「類以合類」。

事實上，與劉徽同時代的趙爽在註解《周髀算經》時強調「類以合類」的重要性，就在於「學其倫類，觀其指歸，為賢智精習者能之也。」而這，當然也積極呼應了劉徽在他的〈九章算術注序〉所強調：

事類相推，各有所歸，故枝條雖分而同本幹知，發其一端而已。

按：上引的「知」訓為「者」。同時，這個提醒也並非「光說不練」，因為他在註解《九章算術》體積公式時，就應用了多次「事類相推」的進路。譬如說吧，他在證明如下圓亭（截頂圓錐）體積公式（圓周率取三時正確）：

上、下周相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三十六而一。

就運用本文第六節所引的方亭（截頂方錐）體積公式：

上、下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一。

來進行「**事類相推**」：

從方亭求圓亭之積，亦猶方冪中求圓冪。[2]**乃令圓冪三乘之，方率四而一，得圓亭之積。**

意思是說：「給定方亭體積，求圓亭體積。這就好比根據正方形面積（公式）來求其內切圓形面積一樣。於是，在圓周率取三的情況下，方亭體積以三（圓冪）乘之，再除以四（方率），即得圓亭體積。」其嚴謹之對待證明或論證，至為顯然！

七、數學論證與推論用語

在上一節無論說算者或劉徽的論證中，即使他們未曾明顯使用表示「因果推論」的用詞，其邏輯推論實質還是不言可喻。儘管如此，根據史家郭書春的統計，劉徽在他的《九章算術注》中，總共使用了 **219** 次的「故」，其中訓「舊」意思的只有 **3** 個。而用於數學定理或推理的訓「是以」、「原因」及「理由」的則高達 **192** 個，如再加上一般說明的，則總計有 **216** 個。

如將此一用語習慣對照《論語》與《墨子》來看，墨家對於「論證」的興趣，顯得相當突出。針對「故」字的使用頻率，郭書春指出：「故」在《論語》中出現 **12** 次，訓「舊」者有 **5** 個。至於在「《墨子》前期著作 **29** 篇，有『故』字 **340** 個，訓『是以』達 **33** 個」。事實上，「故」正是墨子論證形式研究中的專門術語：

夫辭，以故生，以理長，以類行者也。三物必俱，然後足以生。

此處「辭」多少有現代「命題」（**proposition**）之意涵，「理」也有現代解讀的切入點，至於「類」之意義，誠如本文第六節所述，顯然被後來的陳子、趙爽及劉徽所呼應。事實上，劉徽在他的〈九章算術注〉中，也曾提及《墨子》。

另一方面，我在公元 **2000** 年開始研究《筭數書》文本內容時，即注意到其中有好幾則單元使用「因而」這個連接詞。事實上，在該書中，「因而」一詞總共出現了十三次之多，依序為「合分」題一次、「徑分」題四次、「粟求米」題一次、「米求粟」題一次、「絲練」題一次、「以圜材方」題一次、「以方材圜」題一次、以及「里田」題三次。就

---

[2] 在此，劉徽先將「圓亭」內切於等高的「方亭」之內，然後，考慮任意高度的圓亭及方亭的截面，得到的都是大小不一的「圓形」內切於「正方形」之內，其面積（冪）都是三比四，從而圓亭與方亭體積之比也是三比四。由於圓周率（近似值）取三，因此，這個論證完全正確！事實上，這是所謂卡瓦列利原理（**Cavalieri's principle**）的一個早期版本。

這些「因而」連接詞所出現的脈絡來說，前五次都與分數運算有關，第六、七、八次屬於「粟米術」，第九、十次涉及體積計算，最後三次則專屬「里田術」。

為了進一步說明，我將引述《筭數書》的相關問題及術文。先是「徑分」（引校勘後版本）：

徑分以一人命其實，故曰：五人分三又半、少半，各受卅分之廿三。其術曰：下有少半，以一為六，以半為三，以少半為二，并之為廿三。即置人數，因而六之以命其實└。又曰：下有半，因而倍之；下有三分，因而三之；下有四分，因而四之。

這是 **(3+1/2+1/3) ÷ 5 = 23/30** 的分數除法計算，在後來的《九章算術》中稱之為「經分術」，不過，那裡未曾使用此處所引述的「少廣術」：因為下有少半（**2/3**），就將一視為 **6**，半（**1/2**）視為 **3**，少半（**1/3**）視為 **2**，所以，**3+1/2+1/3＝23/6**，其中分子部分相加得 **23**（廿三）。現在，計算 **(23/6)÷ 5** 時，就將此計算「改寫成」**23/6 ÷ ((5×6)/6)**，得每人分得 **23 ÷ 30**（「**各受卅分之廿三**」）。顯然，前述引文所以「**即置人數，因而六之以命其實**」（因而將人數 **5** 乘以 **6** 作為「實」或被除數），就是由於 **1/2 及 1/3** 通分的公分母是 **6** 的「推論」結果。可見，此處連結「因而」具有推論意義。

如果我們考察《九章算術》「少廣章」類似問題（譬如第一題）的「術曰」：

今有田廣一步半。求田一畝，問從（縱）幾何？
答曰：一百六十步。
術曰：下有半，是二分之一。以一為二，半為一，并之得三，為法。置田
二百四十步，亦以一為二乘之，為實。實如法得從步。

一定可以發現：對比《筭數書》「徑分術」，上引《九章算術》「少廣術」的「**置田二百四十步，亦以一為二，乘之為實**」，就少了連接詞「因而」。不過，顯然這並不影響我們根據算法（**algorithm**）而得到正確答案。因此，「因而」一詞的使用，是否可能是先秦思想家論證的遺緒，而不經意地在漢簡《筭數書》中現身？

上述這個說法頗有可能成立，請參看呂叔湘的《中國文法要略》。他先是指出：中國古代「有些用『因』字的句子，竟說不上有因果關係，是『藉此』、『乘此』之意（『因』字的動詞本義就是憑藉，依循，如『因其勢而利導之』），例如：『座之堂下，賜僕妾之食，因數讓之。』（《史記‧張儀傳》）」。不過，他也強調：「用『因而』比單用『因』字所表達的的因果關係要明確些。譬如，在『今君有區區之薛，不拊爱子其民，因而賈利之。』（《戰國策‧齊四》）」。這個句子中的「因而」一詞，就是表示推論結果的連結詞。

那麼，《筭數書》何以保存了這類有關論證之用詞？或許這是以吏為師的脈絡中，學室中長吏教學口語的殘留吧。一旦長吏或「說算者」在講解算法的過程中有所議論或論證，表示因果推論的連接詞自然就會出現，本文第四節所引的「談天者」榮子與陳方之

對話，就是很好的佐證。

另一方面，《筭數書》的抄寫體例中，有一種相當現代句讀的「勾識」記號「乚」，請參見前引「徑分」中的「**因而六之以命其實乚**」，它出現的頻率高達 **157** 次之多。根據考古學家彭浩（挖掘整理《筭數書》計畫主持人之一）的看法，他認為勾識是「用作斷句。在題中數字連續出現時用以點斷上下句，避免誤讀」，至於「算題的末尾皆無句讀」。《睡虎地秦簡》所包括的《語書》也出現類似的情況，學者吳福助認為那些勾識都是誦習者所加，「由此文書勾識符號繁多（凡二十七個），為秦漢其他各篇所不及，足見喜（按即墓主）對它確曾特別用心研讀過。」此外，吳福助分析《語書》（乃至喜所研讀的《為吏之道》）的內容體例與文章風格，發現墓主喜可能「在司法職務之外，還兼有教法之吏的身分。」依此類推，《筭數書》的墓主可能也是具有同樣身份的長吏，更何況這個文本包括了秦漢簡牘所不曾出現的校讎者（王姓與楊姓）註記。

八、說算/談天的故事怎麼說？

在以吏為師的歷史環境中，劉徽、趙爽、陳子、榮方、說算者、談天者、長吏以及用算佐這些角色之間的可能互動關係，就是我們打算要「編寫」的故事。

由於《筭數書》是西漢時期非常重要的算學文本，再加上連同陪葬的算囊（裝筭籌用）之現身，我們推斷這位不知名的墓主（出身秦朝後降於西漢）應該是一位善算的長吏。他從「病免」（生病免職，公元前 **194** 年）到去世（公元前 **186** 年）有八年的光陰，或居家或利用學室課徒訓練小吏，當然極有可能。至於《筭數書》中的王姓及楊姓的校讎者，或許就是在學室訓練中、準備擔當「用算佐」的學徒小吏，至於這個文本所留下來的「勾識」記號「乚」，也可能是學習過程所留下來的蛛絲馬跡。如果此一推斷合理，那麼，陳子與榮方應該就是長吏與學徒的關係。

除了長吏身分之外，陳子乃至於趙爽（退休後隱居山林）也有可能被尊稱為「談天者」。同理，《筭數書》的墓主說不定也有劉徽所謂的「說算者」之尊號，因為他對於論證顯然賦予「應有」的關懷，其中，「因而」連接詞之使用，可能就是他教學「說算」時，期許學徒理解算法的「所以然」之故吧。

至於劉徽本人當然也是說算者 –他「**幼習九章，長再詳覽。觀陰陽之割裂，總算術之根源，探賾之暇，遂悟其意。是以敢竭頑魯，采其所見，為之作注。**」我們猜測：他可能從小在學室習算、最後成為長吏，並且為了訓練學徒小吏而註解《九章算術》充當教材，因為東漢光和二年（公元 **179** 年），《九章算術》就被納入大司農斛的銘文之中，足見它就是官僚必備的實用算術手冊。事實上，這也是「九章算術」四個字首度見諸於現存史冊。[3]當然，劉徽最終進階成為「說算者 **2.0** 版」。我們只要參看他的「抽象」論證如何「超越」說算者的「基驗」證明「陽馬術」（本文第五節），就可以略知一二。其實，他在《九章算術》注序中也指出：「**當今好之者寡，故世雖多通才達學，而未必能綜**

[3] 此一銘文如下：「**大司農以戊寅詔書，秋分之日，同度量、均衡石、權斗桶、正權概，更特為諸州作銅斗、斛、稱、尺。依黃鐘律曆、《九章算術》，以均長短、輕重、大小、用齊七政，令海內都同。**」

於此耳。」顯然，根據他的觀察，之前的說算者在論證方面的確力有未逮。

儘管如此，劉徽究竟如何繼承說算者的傳統，然後發揚光大，我們還無法想像或推測，譬如說吧，根據他自己的說法，他得以掌握善算高官如漢（北平侯）張蒼及（大司農中丞）耿壽昌等刪補遺殘的九章舊文，顯見他擁有足夠的社會人脈/文化資本。不過，由於他的生平事蹟只有寥寥數語可徵：「**魏陳留王景元四年**（按即：公元 263 年），**劉徽注九章**」，因此，我們無從說明他是「基於」何等身分/地位註解《九章算術》。

非常期待未來的歷史研究結果，可以讓我們把這個故事說得更加圓滿。

九、結語

正如本文在一開始所指出，我試圖敘說一個有關古代中國人從事算學論證的故事。為了讓這個故事「確有所本」，我盡力「引經據典」，尋找文本證據（「數學」與「非數學」史料都包括在內），讓所涉及人物角色及其行動，都「歸建回到」其各自的歷史脈絡之中。現在，面對這些人物及其「固有」舞台，我們無論是「拍照存檔」、或是將來「重新敘說」，似乎都有了比較可靠或合情合理的依據。但也由於這種「說服」的需求，古代文本的「解讀」就變得無法避免。因此，我們必須提醒比較不熟悉文言文的讀者，不妨在第一次閱讀本文時，略過本文中的一些古文，直接掌握相關的論述即可。其實，除了少數例外，這些引文都附有現代譯文，不然，運用其中「關鍵詞」，也相當容易「望文生義」，閱讀應該可以無礙才是。

以上就是有關我如何為本文人物角色「清理」歷史場景的說明。這個說明指向算學知識的保存與傳播，而這當然也是我與林倉億、蘇惠玉，及蘇俊鴻合著《數之起源：中國數學史開章《筭數書》》的主要關懷之一。事實上，本文人物及情節絕大部分都參考該書，然而，以「說算者」為切入點，卻使得我們可以為中國秦漢時代算學論證，敘說一個更加融貫（coherent）的故事。無論其中「說算者」或「談天者」是否為第三世紀時人所通用的稱謂或（專門）術語，它們的角色在我們新敘事的脈絡中變得不可或缺，則是毋庸置疑的。

參考文獻

Cullen, Christopher (2007). "The Suàn shù shū , "Writings on reckoning": Rewriting the history of early Chinese mathematics in the light of an excavated manuscript", ***Historia Mathematica*** **34: 10–44.**

Dauben, Joseph (2008). "算數書 ***Suan Shu Shu*****: A Book on Numbers and Computations",** ***Archive for the History of Exact Sciences*** **62: 91-178.**

Lloyd, G. E. R. (2004/2007). ***Ancient Worlds, Modern Reflections: Philosophical Perspectives on Greek and Chinese Science and Culture*****. New York: Oxford University Press.**

Stedall, Jacqueline (2012).***The History of Mathematics: A Very Short Introduction.*** **New York: Oxford University Press.**

呂叔湘 **(1992).**《中國文法要略》，台北：文史哲出版社。

吳福助 (1994).《睡虎地秦簡論考》，台北：文津出版社。
洪萬生 (1982/1983).〈重視證明的時代 – 魏晉南北朝的科技〉，載洪萬生主編，《格物與成器》（台北：聯經出版公司），頁 105-163。
洪萬生 (1991/1999).〈重訪《九章算術》及其劉徽注〉，載洪萬生，《孔子與數學》（台北：明文書局），頁 29-50。
洪萬生 (2000a).〈《算數書》初探〉,《師大學報・科學教育類》45(2): 77-91。
洪萬生 (2000b).〈《算數書》的幾則論證〉,《臺灣歷史學會通訊》第十一期：44-52。
洪萬生 (2002).〈關於《算數書》體例的一個備註〉,《HPM 通訊》5(10): 1-8。
洪萬生、林倉億、蘇惠玉、蘇俊鴻 (2006).《數之起源：中國數學史開章《筭數書》》，台北：臺灣商務印書館。
張家山漢簡『算數書』研究會編 (200?).《漢簡『算數書』寫真版》，東京：朋友書店。
鄒大海 (2008).〈出土簡牘與中國早期數學史〉,《人文與社會》學報 2(2): 71-98。
彭浩 (2001).《張家山漢簡《算數書》注釋》，北京：科學出版社。
郭書春 (2013).《古代世界數學泰斗劉徽》，濟南：山東科學技術出版社。
郭書春、劉鈍點校 (2001).《算經十書》，台北：九章出版社。
蘇意雯等 (2000).〈《算數書》校勘〉,《HPM 通訊》3(11): 1-20。

《數學起源》的 HPM 特色

楊清源
臺灣師範大學數學系碩士班研究生

一、前言

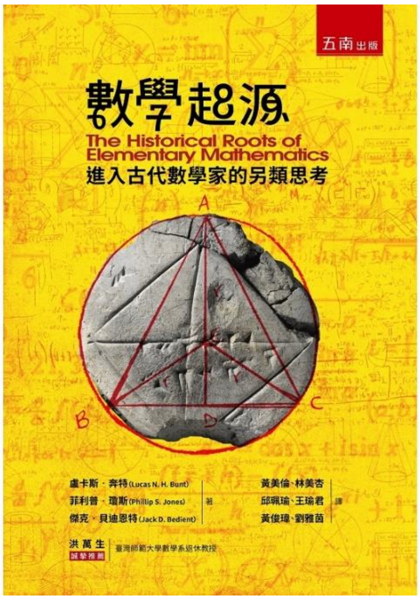
2018 年 **8** 月 **1** 日，**108** 課綱數學領域公布後，筆者發現新課綱特別強調「素養」，這點是有別於 **99** 課綱，例如：基本理念的第三條，明確主張「數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感」，尤其，內容提到

> **人類各種族文明造就出不同的思維文化，例如，古代東方數學偏向具象方式的歸納推理，而西方則傾向抽象方式的演繹思考，數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同時其與不同文化的差異，更能協助教師釐清數學學習的主軸。所以適時地在數學教學之中融入適當的數學史內容，可以提升數學教學品質與學生的學習成效。[4]**

引文直接的說明「數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同時其與不同文化的差異，更能協助教師釐清數學學習的主軸。」恰好是 **HPM** 的內涵。因此，本文想要探究《數學起源》的 **HPM** 特色，並且思考在課程中如何呈現，最後呼應 **108** 課綱所提及的「數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感」。

二、內容介紹

書名**:** 數學起源-進入古代數學家的另類思考 **(The Historical Roots of Elementary Mathematics)**
作者**:** 盧卡斯・奔特**(Lucas N. H. Bunt)**、
菲利普・瓊斯**(Phillip S. Jones)**、
傑克・貝迪恩特**(Jack D. Bedient)**
譯者**:** 黃美倫、林美杏、邱珮瑜、
王瑜君、黃俊瑋、劉雅茵
出版社**:** 五南出版社，台北市
出版年**: 2019**
出版資料**:** 平裝本，**383** 頁
國際書碼**: ISBN 978-957-763-236-4**



本書的內容主要是討論古埃及數學、古巴比倫數學、古希臘數學的個別發展、和歐幾里得等數學家的數學方法，在每個單元中都會附上習題，好讓讀者在閱讀完該單元內

[4] 引自《十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域》(https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-14987,c1179-1.php?Lang=zh-tw)

容後，可以直接練習，同時也是回顧內容。最特別的是，習題當中偶爾會出現開放性的問題，筆者認為這些是相當適合給學生寫成心得報告或是一種自我探究，比如：習題 **5-5** 第 **10** 題，

> **「等腰三角形」(isosceles) 這個字源自於希臘字，其中的「等」(iso) 指得是相等的意思，而 sceles 所指的是則腳 (leg)。(請注意 : skeleton 這個字也有相同的來源)。有許多其他的現代文字都源自於希臘字。你可曾發現過那些屬於這類型的數學文字以及半數學文字 (semimathematical words) 呢?舉例來說，試討論 abacus、arithmetic、decagon、kilometer、logarithm、myriad、pentagon、pentathlon 等字。並試著利用《牛津英文辭典》(The Oxford English Dictionary)等字典找出這些字的根源。**

適時的提供類似的問題，從語言學的角度、歷史發展可以帶給學生「原來數學可以這樣學」的驚訝感受，也是呼應 **108** 課綱的主張。為了避免讀者尚未閱讀此書，筆者將簡單介紹本書的每個章節，好讓第三節要討論 **HPM** 的特色時，讀者可以有初步的認識。

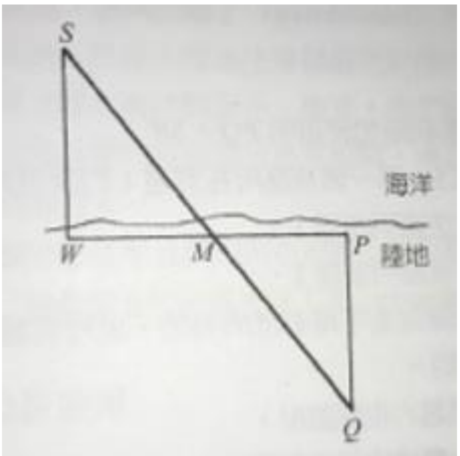
在第一章中，作者從數字符號的紀錄做為開端，說明符號在古埃及的出現是來自紀錄數目、測量等其他用途。接著，介紹當時古埃及人所使用的計數符號，其中最有趣的莫過於 **1,000,000** 的象形文字是向天吶喊，似乎從來未見過此般巨大的數目。說明完數字後，讀者們應該會覺得好奇並提問**:**「那麼當時的人如何操作加、減、乘、除呢**?**」本著這個猜測，作者利用現代的數字與過去的符號並陳，對照之下，方便讀者讀懂古人們的思考方式。緊接著，作者透過古老的文獻《萊因德紙草書》**(Rhind papyrus)**提取一些問題，說明當時特有的啊哈問題**(aha problem)**、「單設法」、「雙設法」，這部分在《溫柔數學史》中第九個素描「線性思考，解一次方程式」也有完整的說明，讀者可以額外閱讀補充相關內容。最後，呼應一開始數字的出現來自測量，所以開始討論「圓面積」、「金字塔的高度、體積」等這類幾何的問題，這不免讓讀者們想知道當時對於 $\boldsymbol{\pi}$ 的看法，因此，作者討論到古埃及人對 $\boldsymbol{\pi}$ 取的近似值，不過當時的人似乎沒有意識到圓周率，而只有單純利用九宮格的方式逼近圓面積，讀者們如果有其他的想法，可以詳細閱讀書中給的參考資料。另外，書中提及金字塔的體積和截頂方錐體積公式皆為正確在體積公式，卻沒有在《萊因德紙草書》中寫出證明，依據其他文件，大致上我們可以歸結出古埃及的數學通常是基於實際上的需求而發展。

在第二章，作者沿襲第一章的鋪陳順序，先簡述巴比倫文明的環境，再接續寫到記數符號與古埃及的差異，並提出基本運算、代數、幾何的問題。尤其，作者以開方法的估計和解兩個數滿足「給定兩數之和、兩數之積」的例子，簡言之，這是根號與一元二次方程式的代數問題，對於沒有閱讀太多數學普及讀物的讀者們，想必在此也會覺得震驚，想不到國中數學的問題在遙遠的古巴比倫人早就已經在討論。類似的，作者也意圖擺放關於圓的幾何問題，相互對比古埃及與古巴比倫人對 $\boldsymbol{\pi}$ 的近似值的差異。有趣的是，作者所引述的「新城市與舊城市的直徑問題」剛好與《窺探天機-你所不知道的數學家》中「天元數之外，你所不知道的李冶」一文，附錄中引述宋朝李冶的作品《測圓海

鏡》卷七第二題「城市的直徑問題」雷同。筆者認為數學史之所以迷人，就在於相似的問題會在不同時空、地點、民族中出現，這是令人驚訝的結果與耐人尋味的發展。

第三章至第六章，主要圍繞在希臘時期的數學發展、數學家的故事以及簡介歐幾里得的《幾何原本》。個別來看，第三章「希臘數學的開端」作者也企圖用類似的進路，不過和第一、二章的最大差異在於當時有記載的數學家更多，依序簡介泰利斯利用測量金字塔影長，求出金字塔的高度。最令筆者印象深刻的是「船離岸邊的距離」，雖然是中學所學的 **ASA** 全等性質，但是卻忠實地呈現「數學」被實踐的背景，若只單單依照下方的內容，的確無法感受到是中等數學的內容。

> 假設船的位置是在點 S，然後，岸邊的觀望者是站在點 W，所求的距離為 SW。當觀望者沿著與$\overline{SW}$垂直的岸邊，走了一段適當的距離$\overline{WM}$之後，在 M 點的沙灘上插立一根棒子。他依循著相同的方向，繼續走一段相等於$\overline{SW}$的距離與 MP。這時，他站在點 P。最後，他開始往內陸走，而且方向必須要與 WP 垂直，直到他看到位於點 S 的船隻與位於點 M 的棒子落在同一條線上的時候。這時候，他站在點 Q，而且$\overline{PQ}$即為所求的距離。



圖一:上述內容附圖

作者以其他史料歸納出五個由泰利斯所發現的定理，其中一個就是上述題目所使用的 **ASA** 全等性質，由此作者想要帶給讀者的是「泰利斯對於數學的重要性來自首位尋求幾何定理的邏輯基礎」。關於「尋求幾何定理的邏輯基礎」的集大成者就是歐幾里得，因故放置在第五、六章介紹。

第三章的後半段談及「畢達哥拉斯與畢氏學派」的貢獻，如:音樂、天文與數學的連結、畢氏三元數、畢氏定理與無理數，以及其中心思想——「數乃萬物本源」的信仰。特別的，作者採用《普林頓編號 **322** 泥板》中的畢氏數表格，從圖論的角度出發，即三角形數與平方數，連結到畢氏三元數，對筆者而言，作者的安排帶來一種意外的發現，經過中學的訓練，我們可以知道畢氏三元數是滿足畢氏定理，一旦如果真的要尋找畢氏三元數，直覺就是「猜數字並調整」；不過，作者依循畢氏學派熟知的公式作為進路，經

過代數轉換後便能發展出畢氏三元數的一般生成公式。想必讀者閱讀到此，是否正手刀衝去翻閱本書呢?

第四章，作者特別討論古希臘的三大難題——「化圓為方、倍立方、三等分任意角」。首先，作者藉希波克拉提斯(**Hippocrates of Chios**)的思考脈絡，來帶領讀者一同思考「化圓為方」的困難處。次者，簡介「倍立方」的傳奇故事後，作者再次引述當時希波克拉提斯的發現呈現給讀者，此次的發現並沒有成功解決這個難題，反而是轉換成代數上的問題。以後見之明來看，從代數的發展，我們已經知道這個問題無法使用尺規解決問題。因此，當時，梅內克謬斯(**Menaechmus**)曾嘗試運用其他工具(如:拋物線)解決問題。另外，柏拉圖也曾經嘗試過此問題，甚至他創造新工具「二刻尺」來成功解決問題，但讀者必須知道古希臘三大難題是不允許用尺規作圖以外的工具來解決，所以即便的確有其他方法解出來，我們仍然說此三大難題是被證明出無解的。最後，作者安排阿基米德與尼科梅德斯(**Nicomedes**)兩人的解法來介紹「三等分任意角」的問題，不過兩者的解法雖然成功解決問題，卻都是使用尺規作圖以外的工具來解決。章節的尾聲，作者用以下的一段話疏理整個三大難題在歷史的意義與進展。

> 雖然源於古希臘的幾何問題，直到利用了近代的代數學概念才獲得解答，但數學家們並未因這些作圖的不可能性而受挫失望。相反地，為了解決這三個令人感興趣的問題，引發了這 2000 年間許多出乎意料又有趣的數學發展，這也是數學家們最感喜悅之事。

筆者在此就在此打住不透露太多書中的詳細內容，期待讀者們閱讀後有不同於筆者的見解與發現。

第五、六章，作者先是簡介柏拉圖、亞里斯多德對於數學知識的看法，甚至提出類似公理、公設的架構，最後承接到歐幾里得的《幾何原本》。其中，最令我印象深刻的是書中仔細地說明《幾何原本》所定義的 **23** 個定義、**5** 個設準，而且習題 **6-3** 第 **3** 題是問得相當好的，如下：

> **請針對「點」、「線」、「直線」、「面」，試著給出比歐幾里得更好的定義。**

依據我自己在教學現場實習的經驗，我數次試圖要學生懷疑我的說法，或是懷疑問題的存在與否，我最根本的用意是「質疑所學」、「盡信書，不如無書」，唯有如此才能進一步對所學保有深刻印象。數學的定義難道只能長成像課本一樣嗎?沒有更好的定義方式嗎?即便是老師都不見得質疑過自己所學習到的知識確定性，給予學生思考的機會，先從定義的喜好、工具的好用或不好用切入，適時詢問學生，而非把死板的知識傳授給學生；更何況數學知識並非在那邊固定不動，是具有動態的進程觀點，如擬經驗主義者 **Lakatos** 所說:「數學知識的形成，依靠猜想、證明、批判、反駁，不斷地改進結論和推理的過程。」因此，以上是我認為這題問得好的原因。

第七章，作者從《幾何原本》選取幾個具代表性的問題，同時討論關於該題的代表性數學家或是現代的解法，例如: 阿基米德與球體積、埃拉托斯特尼(**Eratosthenes**) 與質數、海龍與三角形面積公式、托勒密及帕布斯與三角學、微積分等。作者由現代的觀點回頭檢視古希臘數學問題與現代數學的連結，企圖尋找一種脈絡、一個橋樑，連結兩者。如果讀者沒有接觸太多數學史相關的科普讀物，時常會有一種錯覺是，過去的數學問題與現代的數學問題彷彿是兩條永不相交的平行線，因為學校老師不見得會使用數學史切入教學，因此，導致這樣的誤解，在本章節，筆者認為這是一個很好翻轉的契機，讓讀者對過去數學的發展有所認識。

最後一章，第八章，作者簡介後希臘時期的發展，例如:羅馬時期、阿拉伯時期的計數符號、馬雅人的位值記數系統。以及，討論算盤在不同民族的不同形式，最後到算術的現代理論基礎。這讓我想起在數學史的課堂上，老師曾經多次播放賴希《哲學珠璣》的插圖，這個插圖有兩個重點，第一點是圖中有三人，中間的女性是裁判，左右兩位男性正在比誰算得快，右邊的人是用羅馬時期之後的「計算板」，左邊的男性是運用阿拉伯數碼。第二個重點是從各自的表情可以發現哪一種工具比較有效率，左邊男性的表情從容不迫，右邊則是緊張得冷汗直流。這可以類比到現在的使用電子計算機與徒手計算的情境，或是徒手計算與使用算盤的狀況，一個是如此神速、一個是顯得笨拙。

圖二：賴希《哲學珠璣》的插圖

三、本書的 HPM 特色

首先，我們要討論《數學起源》的 HPM 特色，就必須知道何謂 HPM。在此筆者引述 **HPM** 通訊的發刊詞：

> **所謂 HPM（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics），是指隸屬於國際數學教育委員會（ICMI）的一個研究群，專門推動數學史與數學教學之關聯。簡單地說，它是數學史學對數學教育的一**

種應用，目的當然是利用數學史的研究成果、以及數學史與數學教育的互動，來提升數學教師的教學品質與學生的學習成效。[5]

從上述 **HPM** 的精神與 **108** 數學領域課綱主張「人類各種族文明造就出不同的思維文化**…**，數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同時其與不同文化的差異，更能協助教師釐清數學學習的主軸。」都是想要透過數學史的角度，應用在數學教育上。接下來，筆者將以 **HPM** 的角度檢視《數學起源》，並舉出兩個面向說明。

第一個面向，從每一章節的內容來分析，作者在處理數學問題之前，必然會先交代當時的歷史背景或是該名數學家的生平，筆者認為用意在於現代數學的思維與各個民族的數學思維因為時空、環境的差異，造就出不同的數學進路。如果我們不夠熟悉當時的環境，那麼在思考問題時，總會被自己的學習經驗給限制住，甚至是被現代數學的思維蒙蔽了問題所在。一旦我們對該時空背景有更深一層的理解，也更容易理解問題存在的理由與解法的脈絡。關於內容的面向，的確是紮紮實實的切合課綱的主張，而且對於 **HPM** 的觀點，沿著古代數學的進路，是開闊對數學的視野，給學生的感覺是「原來古人也曾經這樣想問題」或「古人居然想得到這樣的解法」，因此，提升學生對於數學的看法不再只有課本、講義等內容，而是有溫度的、進展的、不同文化的面向。

第二個面向，從習題來分析，不同於坊間參考書、課本、講義所出的習題是關於題型的練習、加深；本書作者雖然也有練習的部分，例如**:**用古埃及、巴比倫、希臘記數符號表示現代的阿拉伯數字或操作自己認為很簡單的加減乘除運算。如**:** 習題 **1-5** 第一題

> 試以古埃及人的乘法運算，計算下列問題：
> **(a) 74×64 (b) 129×413 (c) 58×692 (d) 4968×1234**。

但是這個練習並不是考試導向的逼學生一定要會，反倒是循著古人的學習脈絡，更貼近他們的思考。

另外，也有一種題型是連結現代題目，並用古代的解題方法來解題，如**:**習題 **8-9** 第 **10** 題：

> **請列出下列每一個位值系統的優點與缺點，並與我們慣用的十進位制系統比較:二進位制、五進位制、十二進位制以及六十進位制。**

這兩種題目的形式，筆者認為是富有「欣賞數學的觀點」，因為學習到兩種，甚至更多種方法去解題，並且實際操作後，學生理應會察覺到「哪個方法比較好」，此時，如果老師繼續追問為什麼或帶著大家討論各種方法的優缺點，就能更加深刻體會不同民族的數學思維，而且也能夠逐步建立學生對數學的觀點與批判性思考。

---

[5] 洪萬生(2000)。發刊詞。HPM 通訊 第 1 卷 第 1 期 1

最後，還有一種題型是利用參考文獻的內容，筆者認為參考文獻有以下三種功能。

(1). 補充其他史料更多元的觀點

如習題 **5-2** 第 **16** 題：

> **柏拉圖在其對話錄《泰美歐斯》(*Timaeus*)裡，使用五個正多面體說明科學現象，請查閱書中的解釋，並提出一篇報告。**

因為書籍的頁數限制與網路資訊的發達，而且，閱讀時也能建立自己對於內容的深刻性，尤其是自己查過的資料，會更熟悉文本的架構、柏拉圖的想法和本書作者的觀點。

(2). 探討數學家的生活背景

如習題 **3-3** 第 **6** 題：

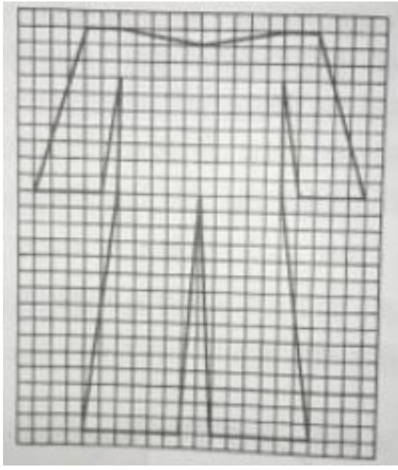
> **許多的傳說之中都曾提到，泰利斯是一位商人、哲學家以及政治家。請參閱百科全書或本章後面所附的參考文獻。**

這個問題無疑是讓學生可以在課本之外，有一定的資源可以補充內容。透過這個問題，學生能夠獲得到的能力除了查資料外，還可以學會統整資料；在這片知識海當中，充斥著不可靠的知識，若能由老師給出可靠的資料來源，勢必是幫助學生。又因為每個章節都有附上的參考文獻，所以對老師來說是非常好利用的工具。

(3). 加深內容的廣度與提升趣味性

如習題 **4-2** 第 **3** 題：

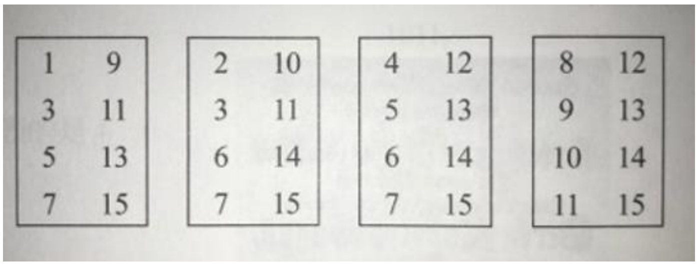
> **在中世紀歐洲，學生會被指派如下之作業:作一正方形(或給定寬的長方形)與給定圖形圖案有相同面積的幾何作圖問題，其中給定的圖案可能是一件長袍或一件斗篷。畫一個圖 4-3 的放大圖，並作一個寬為 36 單位的長方形使其面積與之相等。然後作一個正方形，使其面積恰等於這個長方形。**



圖三 ： 習題 4-2 第 3 題附圖

或是習題 **8-5** 第 **1** 題：

> **以下是一個讀心術。**
> **(a)請依據下圖所示，作出一組卡片。**
> **(b)請某人選擇 1 到 15 之中的其中一個數字。**
> **(c)依次給他看這些卡片，並且每一此都問他所選擇的數字是否在卡片上。**
> **(d)將所有他回答「有」的這些卡片中的第一個數字加起來。那麼這些數字的總合就會是他心中所選的數字。**



圖四 ： 習題 8-5 第 1 題附圖

這兩道題目剛好有個對比，一個是中世紀的趣味問題，另一個則是現在時下流行的數學魔術。這個巧妙的對比來自剛好年代不同，和幾何與代數領域的對比。這兩道題目各自在作者安排內容、歷史脈絡下成為一個有趣的題目，學生除了在歷史觀點看著數學的發展，也能夠抱著有趣的心態學習數學，筆者認為這點也是藉由數學史的發展，凸顯不同民族、時期的人們追求「趣味」數學的紀錄。

總而言之，從這兩個面向分析後，作者仰賴數學史的發展，了解當時人們的生活需求，呈現不同以往數學課堂的面貌，引起學生的動機。次者，本書的角色不單只是一本課外讀物，可以和許多課程的內容一起搭配，所以接著我要討論在教學上可以如何應用這本書，也就是 **HPM** 的實際應用方式。

筆者認為 **HPM** 的特色就在於「應用」數學史於課堂上，因此在這裡粗淺的舉幾個例子，例如:國中的幾何單元，可以從幾何原本的編著精神切入，說明證明的用意，幫助同學對於證明有更具體明確的目標，而不是為了考試而存在的。在高中的課程中，有理數與無理數這個單元可以從畢氏學派切入，說明神祕主義、音樂與數學的官顏、萬物皆數等相關故事，連結畢氏定理、公度量與不可公度量，甚至用幾何和現代代數的觀點證明 $\sqrt{2}$是無理數。此外，圓錐曲線的單元可以補充希臘三大難題，給同學思考兩者的關聯性。

四、結論

拜 **108** 課綱的主張所賜，**HPM** 的進路成為一個冠冕堂皇的教學手法，本文從簡介《數學起源》，到討論《數學起源》的 **HPM** 特色，都重複地呈現歷史的觀點在平常數學課本內的知識，甚至是課本不會補充到數學家、證明的直觀性，在這樣新的教學途徑當中，教師可以從《數學起源》或是其的數學科普讀物中更深刻了解數學的本質、數學的發展，也能夠影響學生。

除此之外，筆者在近期教學實習中，曾經在課堂講述三元一次聯立方程式時，提及《九章算術》的方程術與魏晉南北朝、顏之推在《顏氏家訓》說明對子孫告誡「學習算術，不可以專業」，學生的反應是訝異，因為數學似乎是象牙塔般的孤立，與其他文、史學科似乎八桿子打不著，這反而表示在數學教育上，**HPM** 確實是作為教學有效的進路，也表示具備著 **HPM** 性質的《數學起源》將會是教師在課堂上有利的教學著力點，翻轉學生平常對於數學的感受，幫助學生學習。

參考文獻

洪萬生**(2000).**〈發刊詞〉,《**HPM** 通訊》**1(1)**。

比爾・柏林霍夫、佛南度・辜維亞 **(2008).**《溫柔數學史（***Math through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others***）》，洪萬生、英家銘暨台灣 **HPM** 團隊翻譯。台北：博雅書屋。

洪萬生主編 **(2018).**《窺探天機：你不知道的數學家》，台北：三民書局。

網路資源

維基百科**:**

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%93%B2%E5%AD%A6%E7%8F%A0%E7%8E%91

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group)
基隆市：許文璋（銘傳國中）
台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎、鄭宜瑾（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中） 王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（龍岡國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
彰化市：林典蔚（彰化高中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學園區實驗中學）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！