

1. 若 $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是一個可逆方陣且 $b \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 是一個行向量, 則線性系統 (Linear System)

$$Mx = b \quad (1)$$

必定有唯一解 $x \in \mathbb{R}^{N \times 1}$. 承接期中作業的第 1 題, 試回答下列問題:

- (a) 請將 M 檔案 GE_upper.m 改寫為一個 MATLAB 函式 (檔名: GE.m), 其輸入引數分別設為 M 和 b , 並且輸出引數設為 z .
- (b) 請由教學網站下載檔案 Mm_ex1.zip 與 x&bv_ex1.zip 解壓縮後, 撰寫一個 M 檔案分別生成係數矩陣 M 、唯一解 x 和向量 b , 最後利用問題 (a) 的函式 GE.m 求得線性系統(1)的計算解 z .
- (c) 請求出計算解 z 的相對誤差 (relative error)

$$RE(z) = \frac{\max_{1 \leq i \leq N} |z_i - x_i|}{\max_{1 \leq i \leq N} |x_i|},$$

並且利用指令 tic 和 toc 估計問題 (b) 的運行時間.

- (d) 請提出你 (妳) 的數值實驗觀察與心得.

2. 考慮下列線性二階微分方程的邊界值問題 (Boundary-Value Problem of a Linear 2nd-Order ODE):

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-4}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x^2} y + \frac{2 \ln x}{x^2}, \\ y(1) = \frac{1}{2}, \quad y(2) = \ln 2, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $y = y(x)$ 稱為問題 (2) 在區間 $I = [a, b] = [1, 2]$ 上的解 (solution).

- (a) 請以直接代入方式, 驗證問題(2)在區間 I 上的真實解 (exact solution) 為

$$y(x) = \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \ln x - \frac{3}{2}.$$

- (b) 將區間 I 等分為 $(N + 1)$ 個子區間並考慮下列網格點 (grid point):

$$G = \{x_i \in \mathbb{R} \mid x_i = a + ih = 1 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, N + 1\},$$

其中各子區間寬度均為 $h = 1/(N + 1)$ 且 $N \geq 2$ 為一正整數. 經由有限差分法 (finite-difference method) 離散化後, 可知內網格點 $\{x_i\}_{i=1}^N$ 上的近似值 $z_i \approx y(x_i)$ 滿足一個線性系統 $Mz = b$, 其中 $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 和 $b \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 可由教學網站下載.zip 檔案解壓縮後得到. 因此, 利用第 1 題的函式 GE.m, 可得到邊界值問題 (2) 的計算解 (或稱近似解) 為

$$w_0 = y(1), \quad w_1 = z_1, \quad w_2 = z_2, \quad \dots, \quad w_N = z_N, \quad w_{N+1} = y(2).$$

請分別針對 $N = 2, 4, 8$ 和 $2^{13} = 8192$, 繪製四張真實解和計算解以紅色實線和藍色點折線表示之二維 (子) 圖形, 並用 title、xlabel、ylabel、legend 等指令加入圖形標題、 x -軸、 y -軸與線條的註解說明文字, 最後使用 subplot 指令將四張子圖形並陳於同一個繪圖視窗中.

- (c) 請分別針對 (b) 小題的四個 N 值, 求出計算解 $\{w_i\}_{i=0}^{N+1}$ 的絕對誤差 (absolute error)

$$e_N = \max_{0 \leq i \leq N+1} |w_i - y(x_i)| = \max_{1 \leq i \leq N} |z_i - y(x_i)|,$$

然後使用 `loglog` 指令描繪 $N-e_N$ 的二維圖形, 此線條為黑色實線且資料點標記為藍色星號, 並用 `title`、`xlabel`、`ylabel` 等指令加入圖形標題、 x -軸與 y -軸的說明文字.

- (d) 請提出你 (妳) 的數值實驗觀察與心得.
3. 本題主要考慮一個多項式曲線擬合問題 (Curve Fitting Problem): 給定任意資料點 $\{(t_i, y_i)\}_{i=1}^N$, 找出三階多項式 $y = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3$, 使得

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N (c_0 + c_1t_i + c_2t_i^2 + c_3t_i^3 - y_i)^2} = \|Mx - b\| \quad (3)$$

達到最小值, 其中實數 c_0, c_1, c_2 和 c_3 均為待定係數.

- (a) 請嘗試寫出問題(3)中的矩陣 M 與向量 x, b .
- (b) 請至教學網站下載 `tv&yv_cfp.zip` 解壓縮後, 利用第 1 題的函式 `GE.m` 求解正則方程式 (詳見期中作業第 2 題), 並且得到問題(3)的近似解 $z \approx [c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3]^T$.
- (c) 請將多項式 $y = z_1 + z_2t + z_3t^2 + z_4t^3$ 和資料點 $\{(t_i, y_i)\}_{i=1}^N$, 分別以黑色實線與藍色圓圈標記呈現於同一個圖形視窗中, 並用 `title`、`xlabel`、`ylabel` 等指令加入圖形標題、 x -軸、 y -軸的說明文字.
- (d) 請提出你 (妳) 的數值實驗觀察與心得.