1. 若 $M \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 是一個可逆方陣且 $b \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ 是一個行向量, 則線性系統 (Linear System)

$$Mx = b \tag{1}$$

必定有唯一解 $x \in \mathbb{R}^{N\times 1}$.

(a) 試依據下列虛擬碼, 撰寫一個 M 檔案 (檔名: `GE_upper.m`) 求解線性系統(1).

S1: 建立一個增廣矩陣 (augmented matrix) $A = [M, b] \in \mathbb{R}^{N\times(N+1)}$.

S2: 利用 `for` 迴圈以及有限次的列運算 (row operations), 計算

$$A = A^{(1)} \to A^{(2)} \to \cdots A^{(N-1)} \to A^{(N)},$$

其中 $A^{(N)}(1:N, 1:N)$ 是上三角矩陣 (upper triangular matrix).

S3: 請利用向後代入法 (backward substitution)

$$z_i = \frac{a_{i,N+1}^{(N)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}^{(N)} z_j}{a_{ii}^{(N)}} \qquad (i = N, N-1, \ldots, 2, 1),$$

求出線性系統(1)的計算解 $z = [z_1, z_2, \ldots, z_N]^\top \in \mathbb{R}^{N\times 1}$.

(b) 令 $N = 100$ 並以隨機函式 `randn` 生成矩陣 M 和向量 b. 若利用 MATLAB 左除運算求解線性系統(1)的真實解 x, 並且使用問題 (a) 的 `GE_upper.m` 求出該問題的計算解 z, 請問近似解 z 的相對誤差 (relative error)

$$\mathrm{RE}(z) = \frac{\max_{1\le i\le N} |z_i - x_i|}{\max_{1\le i\le N} |x_i|}$$

會很大嗎?

(c) 請重複上述 (a) 和 (b) 的計算過程若干次後, 提出你 (妳) 的數值實驗觀察與心得.

2. 對於任意向量 $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$, 定義其範數為 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \ge 0$. 由線性代數的理論可知, 當矩陣 $M \in \mathbb{R}^{N\times n}$ 滿足 $\mathrm{rank}(M) = n$, 則正則方程式 (normal equation) $M^\top M z = M^\top b$ 必有唯一解 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 滿足下列不等式

$$\|Mx_0 - b\| \le \|Mx - b\| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $b \in \mathbb{R}^N$ 且通常 $n \ll N$. 請由教學網站下載 `M&b_ne.zip`, 解壓縮後可得到 $N = 2000$ 和 $n = 20$ 的矩陣 M 與向量 b.

(a) 請利用第 1 題的 M 檔案 `GE_upper.m`, 計算正則方程式的近似解 $z \approx x_0$.

(b) 請利用 MATLAB 左除運算求解線性系統 $Mx = b$, 並且以 $x \approx x_0$ 為標準答案, 計算近似解 z 的相對誤差

$$\mathrm{RE}(z) = \frac{\|z - x\|}{\|x\|},$$

其中 $\|\cdot\|$ 可由 MATLAB 內建函式 `norm` 計算之.

(c) 試用隨機函式 randn 生成其他的矩陣 M 和向量 b, 並且重複上述 (a) 和 (b) 的計算過程若干次後, 請提出你 (妳) 的數值實驗觀察與心得.

Ex. 3

3. 假設 $x(t)$ 是下列終值問題 (terminal value problem)

$$\frac{dx}{dt} = 2x^2 - x - 1 \equiv f(x) \quad \text{and} \quad x(t_f) = x_f \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

在區間 $(-\infty, t_f]$ 上的唯一解.

(a) 試用直接代入法驗證問題(2)的真解為

$$x(t) = \frac{e^{3(t-t_f)}(x_f - 1) + (2x_f + 1)}{(2x_f + 1) - 2e^{3(t-t_f)}(x_f - 1)}.$$

(b) 請問極限值 $\lim_{t \to -\infty} x(t) = x_\infty$ 是否存在? 若極限值存在, 此數值 x_∞ 是否滿足二次方程式 $f(x) = 0$?

(c) 若 $h = \dfrac{t_f - t_0}{N} > 0$, 其中 $N \geq 2$ 為一個正整數. 請利用一階線性近

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t-h)}{h} \quad \text{as } h \approx 0$$

推導向後 Euler 法, 其迭代格式如下:

$$t_k = t_f - kh, \quad x_k = x_{k-1} - hf(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

其中 $x_0 = x_f$ 並且 $x_k \approx x(t_k)$. 請撰寫一個 MATLAB 程式碼計算 $\{(t_k, x_k)\}_{k=1}^N$.

(d) 設 $t_0 = 1$, $t_f = 4$ 和 $N = 100$. 請利用 (c) 的程式碼, 計算問題(2)在區間 $[t_0, t_f]$ 上的數值解曲線 $\{(t_f, x_f)\} \cup \{(t_k, x_k)\}_{k=1}^N$, 其中終值 x_f 和線條顏色樣式定義如下:

曲線	終值 x_f	線條顏色樣式
1	2.0	藍色實線
2	1.0	紅色虛線
3	−0.4	綠色實線
4	−0.5	紅色虛線
5	−0.6	黑色實線

請將以上五條曲線呈現於同一個二維圖形視窗, 並且利用內建函式 axis 將橫軸顯示範圍設定為 $[1, 4]$, 以及縱軸顯示範圍設定為 $[-2, 2]$. 除此之外, 請自行加上該二維圖形的標題與兩軸說明文字.

(e) 請計算上述五條數值解曲線的相對誤差

$$\mathrm{RE}(x) = \frac{\max\limits_{1\leq k\leq N} |x_k - x(t_k)|}{\max\limits_{1\leq k\leq N} |x(t_k)|},$$

其中 $x(t_k)$ 由 (a) 小題的公式直接代入, 並且提出你 (妳) 的數值實驗觀察與心得.