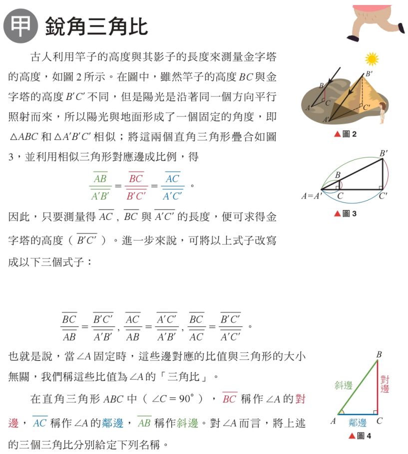
直角三角形的三角比

Trigonometric Ratio of Right Triangle

<table>
<tr><th colspan="2">第 1 節
1st Period</th></tr>
<tr><th>Material</th><th>Note</th></tr>
<tr><td>


甲 銳角三角比

古人利用竿子的高度與其影子的長度來測量金字塔的高度，如圖 2 所示。在圖中，雖然竿子的高度 BC 與金字塔的高度 $B'C'$ 不同，但是陽光是沿著同一個方向平行照射而來，所以陽光與地面形成了一個固定的角度，即 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似；將這兩個直角三角形疊合如圖 3，並利用相似三角形對應邊成比例，得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}。$$

因此，只要測量得 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 與 $\overline{A'C'}$ 的長度，便可求得金字塔的高度（ $\overline{B'C'}$ ）。進一步來說，可將以上式子改寫成以下三個式子：

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}},\ \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}},\ \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}。$$

也就是說，當 $\angle A$ 固定時，這些邊對應的比值與三角形的大小無關，我們稱這些比值為 $\angle A$ 的「三角比」。

在直角三角形 ABC 中（ $\angle C=90^\circ$ ）， $\overline{BC}$ 稱作 $\angle A$ 的對邊， $\overline{AC}$ 稱作 $\angle A$ 的鄰邊， $\overline{AB}$ 稱作斜邊。對 $\angle A$ 而言，將上述的三個三角比分別給定下列名稱。

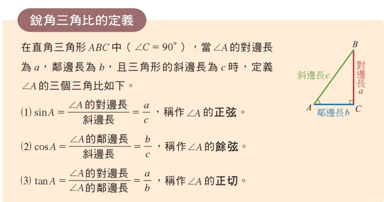
▲圖 2

▲圖 3

▲圖 4
</td><td>

Word: Hypotenuse (斜邊), Opposite (對邊), Adjacent (鄰邊), Trigonometric Ratio (三角比), Similar (相似), Pyramid (金字塔), Parallel (平行), Solar Altitude (太陽高角度).

Sentence:

1. We use the height and shadow of a pole to measure the height of the pyramid. (我們用竿子的高度及影子去測量金字塔的高度)
2. The angle of the sun’s rays relative to the Earth's horizon is fixed. (太陽光與地平線形成固定角度)
3. In a pair of similar triangles, the corresponding sides are proportional. (兩個相似三角形，其對應邊成比例)
</td></tr>
<tr><td>


銳角三角比的定義

在直角三角形 ABC 中（ $\angle C=90^\circ$ ），當 $\angle A$ 的對邊長為 a，鄰邊長為 b，且三角形的斜邊長為 c 時，定義 $\angle A$ 的三個三角比如下。

(1) $\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊長}}{\text{斜邊長}}=\dfrac{a}{c}$，稱作 $\angle A$ 的**正弦**。

(2) $\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}=\dfrac{b}{c}$，稱作 $\angle A$ 的**餘弦**。

(3) $\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊長}}{\angle A\text{的鄰邊長}}=\dfrac{a}{b}$，稱作 $\angle A$ 的**正切**。

</td><td>

Word: Sine (正弦), Cosine (餘弦), Tangent (正切), Mnemonic (記憶法).

Translation:

In a right triangle ABC. Set angel BAC is angle A. The opposite side, **a**, is the side across from the angle. The adjacent side, **b**, is the side closest to the angle. The hypotenuse is the side, **c**, of the triangle opposite
</td></tr>
</table>

the right angle. The three trigonometric ratios of angle A is as follows:

(1) $\sin A = \dfrac{opposite\ A}{hypotenuse} = \dfrac{a}{c}$, called **Sine** A.

(2) $\cos A = \dfrac{adjacent\ to\ A}{hypotenuse} = \dfrac{b}{c}$, called **Cosine** A.

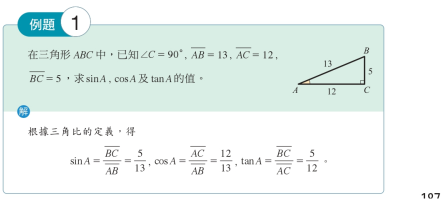
(3) $\tan A = \dfrac{opposite\ A}{adjacent\ to\ A} = \dfrac{a}{b}$, called **Tangent** A.

Note:

A common mnemonic for remembering these relationships is **SohCahToa**, formed from the first letters of "**S**ine is **o**pposite over **h**ypotenuse (**Soh**), **C**osine is **a**djacent over **h**ypotenuse (**Cah**), **T**angent is **o**pposite over **a**djacent (**Toa**)."

Video: Jonathan Mann - *Soh Cah Toa Song.*

https://www.youtube.com/watch?v=PIWJo5uK3Fo



例題 1

在三角形 ABC 中，已知 $\angle C = 90°$, $\overline{AB} = 13$, $\overline{AC} = 12$, $\overline{BC} = 5$，求 $\sin A$, $\cos A$ 及 $\tan A$ 的值。

解

根據三角比的定義，得

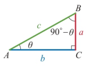
$$\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{5}{13},\ \cos A = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{12}{13},\ \tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{5}{12}。$$

107

Translation:

By the definition of trigonometric ratio, we have

$$\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{5}{13},\quad \cos A = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{12}{13},\quad \tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{5}{12}.$$

<table>
<tr>
<td>
乙 三角比的基本關係式
以下我們來介紹三角比之間的關聯性。
在直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 為直角，$\angle A=\theta$，$\angle B=90^\circ-\theta$，以 a, b, c 分別表示 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊長（如圖10所示），由三角比的定義知


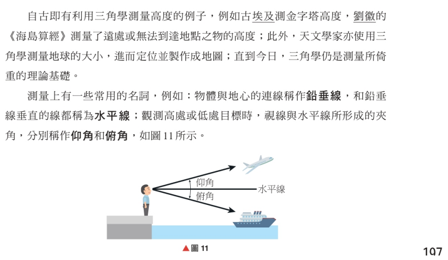
▲圖 10
$\sin\theta=\frac{a}{c}, \cos\theta=\frac{b}{c}, \tan\theta=\frac{a}{b}$。
可進一步推得：
(1) $\tan\theta=\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$。
(2) $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$。
(3) $\sin(90^\circ-\theta)=\frac{b}{c}=\cos\theta, \cos(90^\circ-\theta)=\frac{a}{c}=\sin\theta$。
習慣上，經常將 $(\sin\theta)^2$ 和 $(\cos\theta)^2$ 分別寫成 $\sin^2\theta$ 和 $\cos^2\theta$。
193
銳角三角比的關係式
(1) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$。 【商數關係式】
(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$。 【平方關係式】
(3) $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta, \cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$。 【餘角關係式】
</td>
<td>
Word: Identity(恆等式), Quotient(商數), Pythagorean (畢達哥拉斯), Cofunction (餘函數), Complementary Angle (餘角), Supplementary Angle (補角).
Sentence:
1. The relationship between trigonometric ratios.
(三角比之間的關係)
2. Further, we infer that… (進一步推論…)
3. $(\sin\theta)^2$ and $(\cos\theta)^2$ are written respectively as $\sin^2\theta$ and $\cos^2\theta$.
Note: $\sin^2\theta$ is usually said: sine squared θ or sine θ quantity squared.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
例題 5
求下列各式的值。
(1) $\cos^2 34^\circ+\cos^2 56^\circ$。 (2) $\tan^2 65^\circ-\frac{1}{\cos^2 65^\circ}$。
解
(1) 因為 $34^\circ+56^\circ=90^\circ$，所以 $\cos 34^\circ=\cos(90^\circ-56^\circ)=\sin 56^\circ$，
利用平方關係式，得
$\cos^2 34^\circ+\cos^2 56^\circ=\sin^2 56^\circ+\cos^2 56^\circ=1$。
104
(2) 利用商數關係式，得 $\tan 65^\circ=\frac{\sin 65^\circ}{\cos 65^\circ}$，
利用上式與平方關係式，得
$\tan^2 65^\circ-\frac{1}{\cos^2 65^\circ}=\frac{\sin^2 65^\circ}{\cos^2 65^\circ}-\frac{1}{\cos^2 65^\circ}$
$=\frac{\sin^2 65^\circ-(\sin^2 65^\circ+\cos^2 65^\circ)}{\cos^2 65^\circ}$
$=\frac{-\cos^2 65^\circ}{\cos^2 65^\circ}=-1$。
</td>
<td>
Translation:
(1) Since $34^\circ+56^\circ=90^\circ$,
$\cos 34^\circ=\cos(90^\circ-56^\circ)=\sin 56^\circ$.
By Pythagorean Identity, we have
$\cos^2 34^\circ+\cos^2 56=\sin^2 56^\circ+\cos^2 56^\circ=1$
(2) By Quotient Identity we have $\tan 65^\circ=\frac{\sin 65^\circ}{\cos 65^\circ}$.
And then, use this formula and Pythagorean Identity we have
</td>
</tr>
</table>

$$\tan^2 65^\circ - \frac{1}{\cos^2 65^\circ}$$

$$= \frac{\sin^2 65^\circ}{\cos^2 65^\circ} - \frac{1}{\cos^2 65^\circ}$$

$$= \frac{\sin^2 65^\circ}{\cos^2 65^\circ} - \frac{\left(\sin^2 65^\circ + \cos^2 65^\circ\right)}{\cos^2 65^\circ}$$

$$= \frac{-\cos^2 65^\circ}{\cos^2 65^\circ} = -1$$


自古即有利用三角學測量高度的例子，例如古埃及測金字塔高度，劉徽的《海島算經》測量了遠處或無法到達地點之物的高度；此外，天文學家亦使用三角學測量地球的大小，進而定位並製作成地圖；直到今日，三角學仍是測量所倚重的理論基礎。

測量上有一些常用的名詞，例如：物體與地心的連線稱作**鉛垂線**，和鉛垂線垂直的線都稱為**水平線**；觀測高處或低處目標時，視線與水平線所形成的夾角，分別稱作**仰角**和**俯角**，如圖 11 所示。

▲圖 11

107

Word: Vertical Line (鉛垂線), Horizontal Line (水平線), Angle of Elevation (仰角), Angle of Depression (俯角).

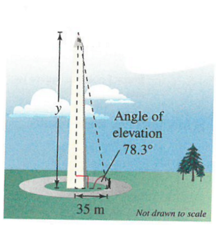
Sentence:

1. Angle of Depression: The angle measured down from the horizon or a horizontal line. (俯角：從水平線往下測量的角)
2. Angle of Elevation: The angle measured up from the horizon or a horizontal line. (仰角：從水平線往上測量的角)

補充題

Material

A surveyor stands 35 meters from the base of the Washington Monument, as shown in the figure on the right. The surveyor measures the angle of elevation to the top of the monument to be 78.3°. How tall is the Washington Monument?



Solution From the figure we know

$$\tan 78.3^\circ = \frac{opp}{adj} = \frac{y}{35}$$

Where y is the height of the monument. So, the height of the Washington Monument is

$$
\begin{aligned}
y &= 35\tan 78.3^\circ \\
&\approx 35(4.8288) \\
&\approx 169\ meters.
\end{aligned}
$$

Note
Word: surveyor (測量員), height (高度).
Sentence: ...measures the angle of elevation to the top of ... (測量⋯的仰角)

參考資料
References

1. 許志農、黃森山、陳清風、廖森游、董涵冬（2019）。*數學 2：單元 10 直角三角形的三角比*。龍騰文化。
2. Openstax. (2022, May 24). *AlgebraAndTrigonometry.* https://reurl.cc/x9pKbe.
3. Ron Larson. (2018). *Precalculus 10th Edition.* Cengage Learning.

製作者：臺北市立陽明高中 吳柏萱 教師