2.2.3. Linear ODE. 一次多項式函數 $y=ax+b$ 一般也稱為 linear。而一個 ODE 若可寫成 $y'=a(x)\cdot y+b(x)$，其中 $a(x)$, $b(x)$ 為 x 為變數的單變數函數，便稱為 *linear ODE*。其實 linear ODE 的解法我們可以用前面的方法處理，特別提出它不外乎其經常在各領域的應用中出現。另一方面，我們處理高階的 ODE 也是從 linear 的情況開始，所以了解它的特性，有助於我們以後探討高階的 linear ODE。

首先要辨識 linear ODE，記得需要寫成 $y'=F(x,y)$ 這樣的形式。例如 $y'\cos x+y\sin x=x$ 就必需先除以 $\cos x$ 移項得 $y'=-\tan x\cdot y+x\sec x$，所以它是 linear ODE。

一次函數 $y=ax+b$ 當 $b=0$ 時稱為 *homogeneous*; 而 $b\neq 0$ 時稱為 *nonhomogeneous*。對於 linear ODE：$y'=a(x)\cdot y+b(x)$，我們也沿用這種說法：當 $b(x)=0$ 時稱為 *homogeneous*; 而 $b(x)\neq 0$ 時稱為 *nonhomogeneous*。

首先我們看 homogeneous 的情形，即 $y'=a(x)y$ 大家應該馬上辨識出來，它是 separable。所以馬上可用 separable 的方法解出 $\ln|y|=\int a(x)\,dx+C$。也就是說，若 $A(x)$ 為 $a(x)$ 的反導函數，則此 linear ODE 的 general solution 為 $y=C\cdot e^{A(x)}$。

有時候一個 linear ODE 雖然不是 homogeneous（即 nonhomogeneous）不過可以適當變換一下使它成為 homogeneous。最常見的情況就是 $y'=a(x)\cdot y+ra(x)$（即 $b(x)$ 是 $ra(x)$），其中 r 為常數的情況。此時變換一下變數 $u=y+r$，可得 $u'=a(x)\cdot u$ 就是 homogeneous 了。也就是說可以用 separable 的方式處理。當然了也可用接著要介紹的 nonhomogeneous 的方式處理，但是一般來說 homogeneous 會比較簡單。

Example 2.2.15 (課本 Problem 1.5.10)**.** 原 ODE 為 $y'\cos x+(3y-1)\sec x=0$。若沒有看出是 separable，將它移項改寫為 $y'=-3y\sec^2 x+\sec^2 x$ 是 nonhomogeneous linear ODE。不過若寫成 $y'=-3\sec^2 x(y-\frac{1}{3})$ 且用 $u=y-\frac{1}{3}$ 替換成 $u'=(-3\sec^2 x)\cdot u$，它就是 homogeneous linear ODE，所以可以用 separable 的方式處理（其實在前一步應該就可看出是 separable 了）。當然了我們仍能用接著要介紹的 nonhomogeneous 的方式處理。留到習題讓大家兩種方法解看看。 ♯

至於 nonhomogeneous 的情形：$y'=a(x)\cdot y+b(x)$，若我們將之改寫成

$$(a(x)\cdot y+b(x))\,dx-dy=0, \tag{2.7}$$

且令 $M(x,y)=a(x)y+b(x)$, $N(x,y)=-1$，則 $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)=a(x)$。故將其除以 $N(x,y)$（別忘了 $N(x,y)=-1$）後為 x 的單變數函數 $-a(x)$。也因此可利用 Theorem 2.2.12，得到其 integrating factor $e^{-A(x)}$（此處 $A(x)$ 仍假設為 $a(x)$ 的反導函數）。所以將原式乘上 $e^{-A(x)}$ 後，接著可用 exact ODE 的方法解。

Example 2.2.16 (課本 Example 1.5.1)**.** 解 IVP：$y'+y\tan x=\sin 2x$, $y(0)=1$。由於 $\tan x$ 的反導函數為 $\ln|\sec x|$，我們找到 integrating factor $\sec x$。原 ODE 乘上 $\sec x$ 後成為 exact，解得 general solution $y=C\cos x-2\cos^2 x$。再代 IVP $x=0,y=1$，得 particular solution $y=3\cos x-2\cos^2 x$。 ♯

如同前面情況，有可能一個 ODE 不是 linear，可經由一些變換變成 linear ODE。有很多情況可以這麼處理，這裡僅介紹兩種較常見的情況。第一種情況是形如

$$y' = \frac{1}{a(y)\cdot x + b(y)}$$

這樣的 ODE。也就是分母是 x linear 的形式。若我們改用 dx, dy 的表示法，可寫成

$$(a(y)\cdot x + b(y))\,dy - dx = 0. \tag{2.8}$$

若將式子 (2.8) 與式子 (2.7) 相比較，不難發現它們只是 x, y 互換的情形。所以我們可以用相同的方式（即找 integrating factor）處理。當然了，如前面的情況，當 $b(y) = ra(y)$ 時，它其實也是 separable，所以也可用 separable 處理。

Example 2.2.17 (課本 Problem 1.5.26, 1.5.27)**.** 考慮 ODE: $y' = \tan y/(x-1)$。此 ODE 可寫成 $y' = \dfrac{1}{(\cot y)\cdot x - \cot y}$ 所以可如同 nonhomogeneous linear ODE 用找 integrating factor 的方式處理。另外也可看出它是 separable（因 $a(y) = \cot y$, $b(y) = -a(y)$）。留到習題讓大家兩種方法解看看。

另考慮 ODE: $y' = \dfrac{1}{6e^y - 2x}$，它不是 separable（$a(y) = -2$, $b(y) = 6e^y$），不過可如同 nonhomogeneous linear ODE 用找 integrating factor 的方式處理。 $\sharp$

另一種常見的情況就是所謂的 *Bernoulli equation*。它是如以下形式的 ODE：

$$y' = a(x)y + b(x)y^s,$$

其中 s 為任意實數。當 $s = 0, 1$ 時，它是 linear ODE。除此之外，就不是 linear 了。此時，我們可以做變數變換 $u = y^{1-s}$。將 u 微分得 $u' = (1-s)y^{-s}y'$ 再代 $y' = a(x)y + b(x)y^s$ 得 $u' = (1-s)y^{-s}(a(x)y + b(x)y^s) = (1-s)y^{1-s}\cdot a(x) + (1-s)b(x)$. 再用一次 $u = y^{1-s}$ 得

$$u' = (1-s)a(x)\cdot u + (1-s)b(x).$$

就變成 linear ODE 了。另外要注意，如果 $b(x) = ra(x)$，那就是 separable，所以也可用 separable 的方式處理。

Example 2.2.18 (課本 Example 1.5.4)**.** 考慮 Bernoulli equation：$y' = ay - by^2$，其中 a, b 為實數。利用 $u = y^{-1}$ 替換，得 linear ODE：$u' = -au + b$。其 general solution 為 $u = Ce^{-ax} + (b/a)$。別忘了換回 y，得 $y = \dfrac{1}{Ce^{-ax} + (b/a)}$。注意在變換時假設 $y \neq 0$，所以別忘了最後檢查 $y = 0$ 仍為此 ODE 的一解。

另外要注意，因為 $-b = (-b/a)\cdot a$，所以此 ODE 也是 separable，故可用 separable 的方式處理。也就是將之寫成

$$\frac{1}{ay - by^2}dy = dx.$$

左邊的積分可以用部分分式處理，這裡我們簡單複習一下。因為分母 $ay - by^2$ 可分解成 $-by(y - \frac{a}{b})$。我們先考慮

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y - \frac{a}{b}} = -\frac{a}{b}\frac{1}{y(y - \frac{a}{b})},$$

故
$$\int \frac{1}{ay-by^2}dy = \frac{1}{a}\int \left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y-\frac{a}{b}}\right) dy = \frac{1}{a}(\ln|y|-\ln|y-\frac{a}{b}|)+C$$
也因此推得 $y = Ce^{ax}(y-\frac{a}{b})$。我們可以進一步化簡與前一個方法做比較，得 general solution
$$y = \frac{a}{b}\frac{Ce^{ax}}{Ce^{ax}-1}.$$
兩者寫下的 general solution 是一致的。 ♯

Question 2.9. 課本習題 *1.5.3, 1.5.10, 1.5.22, 1.5.23, 1.5.26* 都是 *separable ODE*，但也都可用 *linear ODE* 相關的方法處理 (參見前面 *Example 2.2.15, 2.2.17, 2.2.18*)。請用兩種方法解這幾題，並確認兩方法所得 *general solution* 之一致性。

Question 2.10. 做課本習題 *1.5.7, 1.5.8, 1.5.27, 1.5.28.*

Chapter 3

二階線性常微分方程

當微分方程的階數越高就越困難。目前基本上只有線性的微分方程能找到有系統的解法，我們的目標是想要解高階（即一階以上）的線性 ODE。由於我們已會處理一階的線性 ODE，在這章我們專注於處理二階的線性 ODE。它有助於幫助我們了解從一階到二階的差距，也因此能掌握如何推進到更高階的線性 ODE。

3.1. 基礎概念

這一節我們先介紹處理二階線性 ODE 的基本概念，以便在之後介紹解法時能了解其背後的原因。

我們先定義何謂“二階線性常微分方程”（second-order linear ODE）。首先我們先將二階 ODE（即最高出現二階導函數 y'' 的微分方程式）寫成 $y''=f(x,y,y')$ 的形式，若可表成 $y''=g(x)\cdot y'+h(x)\cdot y+r(x)$ 的形式，其中 $g(x),h(x),r(x)$ 是 x 的單變數函數，便稱為是 second-order linear ODE。以後為了方便利用一般解方程式熟悉的方法，我們用 $y''+a(x)\cdot y'+b(x)\cdot y=c(x)$（即與 y 有關的移到同一邊）來表示一般的二階線性 ODE。我們又特別稱 $a(x),b(x)$ 為此 linear ODE 的係數（coefficient）。

如同一階情況，當 $c(x)=0$ 這樣的 linear ODE 便稱為 *homogeneous*，而 $c(x)\neq 0$ 便稱為 *nonhomogeneous*。例如 $xy''+y'+xy=0$，可表為

$$y''+\frac{1}{x}y'+y=0,$$

所以它是 homogeneous linear ODE 且 y',y 的係數分別為 $\frac{1}{x},1$。而 $y''+25y-e^{-x}\cos x=0$，因可表為

$$y''+25y=e^{-x}\cos x$$

所以它是 nonhomogeneous linear ODE 且 y',y 的係數分別為 $0,25$。至於 $y''y+(y')^2=0$ 就不是 linear ODE 了。

為什麼要區分 homogeneous 和 nonhomogeneous 呢？在一階的情況，它幫我們分成兩種方法來處理，但這不是主要的原因。要做如此的區分，主要是下面兩個重要的性質。注

意這兩個性質通用於一般的 linear ODE（不限一階、二階），不過為了方便解釋，我們用二階的情況解釋。

3.1.1. Fundamental Theorem for Homogeneous Linear ODE. 考慮 homogeneous linear ODE：$y''+a(x)\cdot y'+b(x)\cdot y=0$。假設 y_1,y_2 皆為此 ODE 之解。對於任意的實數 c_1,c_2，我們考慮新的函數 $y_3=c_1y_1+c_2y_2$，此時 y_3 也會符合原 homogeneous linear ODE。

會有這樣的性質主要是因為微分的性質，即 $y_3'=(c_1y_1+c_2y_2)'=c_1y_1'+c_2y_2'$ 以及 $y_3''=(c_1y_1'+c_2y_2')'=c_1y_1''+c_2y_2''$。所以依假設 y_1,y_2 皆為此 ODE 之解，即

$$\begin{aligned} c_1(y_1''+a(x)\cdot y_1'+b(x)\cdot y_1) &= 0 \\ c_2(y_2''+a(x)\cdot y_2'+b(x)\cdot y_2) &= 0. \end{aligned}$$

將上下兩式相加便可推得

$$y_3''+a(x)\cdot y_3'+b(x)\cdot y_3=(c_1y_1''+c_2y_2'')+a(x)\cdot(c_1y_1'+c_2y_2')+b(x)\cdot(c_1y_1+c_2y_2)=0.$$

Example 3.1.1 (課本 Example 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3)**.** 我們考慮 homogeneous linear ODE, nonhomogeneous linear ODE 以及 nonlinear ODE 三種情況。

考慮 homogenous linear ODE：$y''+y=0$。很容易驗證 $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ 皆符合此 ODE。也因此對任意 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$，$y_3=c_1\cos x+c_2\sin x$ 也符合 $y''+y=0$。

另一方面 $y_1=1+\cos x, y_2=1+\sin x$ 都符合 nonhomogeneous linear ODE：$y''+y=1$。但它們的線性組合如 y_1+y_2, $2y_1$, $5y_2$ 都不符合。

至於非 linear 的 ODE 就更不可能有此性質。例如 $y_1=1, y_2=x^2$ 皆符合 $y''y-xy'=0$，但它們的線性組合也不符合。 ♯

要注意當 ODE 中 y 的次數不是 1，就不會有此性質。例如 y^2 的情形，由於 $(c_1y_1+c_2y_2)^2\neq c_1y_2^2+c_2y_2^2$，所以不會有此性質。這也是 linear ODE 我們要求 y 只能出現一次式的原因。

另外要注意的是當 y_1 是 homogeneous linear ODE 的一個解，我們知道將 y_1 乘上一個常數 c，即 cy_1 也會是此 ODE 的一解。但是若將 y_1 乘上一個不是常數的函數 u，此時 $u\cdot y$ 就未必是原 ODE 的解了。會出錯的原因當然就是微分的乘法原理 $(u\cdot y)'=u'\cdot y+u\cdot y'$ 而不是 $(u\cdot y)'=u\cdot y'$。

3.1.2. Fundamental Theorem for Nonhomogeneous Linear ODE. 至於 nonhomogeneous linear ODE 有怎樣的性質呢？若 y_1,y_2 皆符合 $y''+a(x)y'+b(x)y=c(x)$，即

$$\begin{aligned} y_1''+a(x)\cdot y_1'+b(x)\cdot y_1 &= c(x) \\ y_2''+a(x)\cdot y_2'+b(x)\cdot y_2 &= c(x). \end{aligned}$$

將上下兩式相減可得

$$(y_1''-y_2'')+a(x)\cdot(y_1'-y_2')+b(x)\cdot(y_1-y_2)=0.$$

也就是說，若令 $y_3=y_1-y_2$，則因 $y_3'=y_1'-y_2'$ 以及 $y_3''=y_1''-y_2''$，可知 y_3 會是與原 nonhomogeneous linear ODE 相同係數的 homogeneous linear ODE $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ 的一解。

反之，若 y_1 時 nonhomogeneous $y''+a(x)y'+b(x)y=c(x)$ 的一解，而 y_2 是同樣係數的 homogeneous $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ 的一解，即

$$\begin{aligned} y_1''+a(x)\cdot y_1'+b(x)\cdot y_1 &= c(x) \\ y_2''+a(x)\cdot y_2'+b(x)\cdot y_2 &= 0. \end{aligned}$$

將上下兩式相加可得

$$(y_1''+y_2'')+a(x)\cdot(y_1'+y_2')+b(x)\cdot(y_1+y_2)=c(x).$$

也就是說，若令 $y_3=y_1+y_2$，則 y_3 也會是原 nonhomogeneous linear ODE 的一解。

這個基本定理告訴我們，只要找到 nonhomogeneous linear ODE 的一解，則所有可能的解都會是此解加上一個同樣係數的 homogeneous linear ODE 的解。所以我們只要先找到此 homogeneous linear ODE 的所有解，再加上任一個原 nonhomogeneous linear ODE 的一解，就可以吧這個 nonhomogeneous linear ODE 的所有解找到。

Example 3.1.2. 由於我們還未學如何解二階 linear ODE，讓我們回到 Example 2.2.16（即課本 Example 1.5.1）的一階 nonhomogeneous linear ODE: $y'+y\tan x=\sin 2x$ 的情況。我們解得 general solution 為 $y=C\cos x-2\cos^2 x$。事實上任兩解 $y_1=c_1\cos x-2\cos^2 x$, $y_2=c_2\cos x-2\cos^2 x$，皆有 $y_1-y_2=(c_1-c_2)\cos x$。所以我們可以看出 $y=C\cos x$ 應該就是 $y'+y\tan x=0$ 的 general solution。事實上利用一階 homogeneous linear ODE 的解法（即 separable 的看法）$y'+y\tan x=0$ 可寫成 $\frac{1}{y}dy=-\tan x\,dx$。兩邊積分得 $\ln|y|=\ln|\cos x|+C$，故得 general solution $y=C\cos x$。 ♯

3.1.3. Basis of Second-order Homogeneous Linear ODE. 我們已經看出要處理 linear ODE，找到 homogeneous 的所有解相當重要。我們先探討一階的情況，再來說明二階的情況。至於更高階的情況大家應可看出也會有相對應的結果。

一階的 homogeneous linear ODE，即 $y'=a(x)y$ 的情況，在上一章 2.2.3 節中，我們已知其 general solution 為 $C\cdot e^{A(x)}$，其中 $A(x)$ 為 $a(x)$ 的反導函數。也就是說當你找到 $y'=a(x)y$ 的一個 particular solution y_1 後，前面有關於 homogeneous linear ODE 的基本定裡（參見 3.1.1）告訴我們將 y_1 乘上任意的常數 c，所得的函數 cy_1 也是其解。而這裡我們又知道所有的解都是 cy_1 的形式，所以只要找到一解 y_1，就可寫下其 general solution 為 cy_1。

至於在二階 homogeneous linear ODE 的情況，如果能找到它的兩個解 y_1,y_2，且此二解並沒有倍數的關係（即 $y_2\neq cy_1$）。我們便稱此二解為“線性獨立”(linearly independent) 的兩個解。當然了，任意這兩個解的線性組合 $c_1y_1+c_2y_2$ 也會是此 ODE 的解。事實上反過來也是對的，也就是說，所有的解也都會是這兩個解的線性組合（之後會稍加解釋）。所以此 homogeneous linear ODE 的 general solution 便是 $C_1y_1+C_2y_2$。由於任兩個線性獨立

的解，都可以形成所有的解，所以我們便稱這兩個解為此二階 homogeneous linear ODE 解的一組 *basis*（基底）。

千萬要注意，解二階 homogeneous linear ODE，所找的兩個解一定要 linearly independent 才能寫下 general solution。若不是 independent，例如 $y_2 = cy_1$，此時 y_1, y_2 的任意線性組合 $c_1y_1 + c_2y_2 = c_1y_1 + c_2cy_1 = (c_1 + c_2c)y_1$，仍僅是 y_1 的線性組合，並不足以表示所有的解。

另外提供一個小技巧。當我們在找 homogeneous linear ODE 的解時若用到積分找反導函數，此時可不必加上 C，因為只要找到任意兩個線性獨立的解，就能將 general solution 寫下。

Example 3.1.3 (課本 Example 2.1.5, 2.1.6)**.** 我們可看出 $y'' + y = 0$ 有兩個解 $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$。因為 $y_2/y_1 = \tan x$ 不是常數，所以 y_1, y_2 為 independent，故此 ODE 有一組 basis 為 $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$。我們可寫下其 general solution 為 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$。

同理 $y'' - y = 0$ 有兩個解為 $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$。因為 $y_1/y_2 = e^{2x}$ 不是常數，故它們是一組 basis。因此此 ODE 其 general solution 為 $C_1e^x + C_2e^{-x}$。 $\sharp$

Question 3.1. 做以下課本習題的 (a) 部分：*2.1.16, 2.2.17, 2.1.18, 2.1.19.*