有關於 path independent 的函數，首先我們看一個容易理解的性質。如果 vector function $\mathbf{f}$ 在一個區域 D 是 path independent，則對於 D 中任意的一個封閉曲線（closed curve）C，我們可以在 C 中找兩點 P,Q，此時 C 被 P,Q 分成兩段。我們把一段從 P 到 Q 稱為 C_1，另一段從 Q 到 P 稱為 C_2。由線積分性質 (式子 5.1) 我們有 $\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$。由於 C_2 是反向由 Q 到 P，然而 $-C_1$ 這個路徑也是從 Q 到 P，故依 path independent 的假設我們有 $\int_{C_2}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_{-C_1}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = -\int_{C_1}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$，因此推出 $\mathbf{f}$ 在任意封閉曲線 C 的線積分 $\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = 0$。

另一方面，如果 vector function 滿足在區域 D 中任意的封閉路徑 C 其線積分為 0。考慮 D 中以 P 點為起點 Q 點為終點的任意兩個路徑 C_1, C_2。由於從 P 沿著 C_1 到 Q，再由 Q 沿著 C_2 相反的路徑（即 $-C_2$）回到 P 是一個封閉路徑 C 所以我們有 $\int_{C_1}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = 0$。因此推得 $\int_{C_1}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$。因此我們有以下定理。

Theorem 5.4.3. 考慮定義在區域 D 的一個 *vector function* $\mathbf{f}$。則 $\mathbf{f}$ 在 D 中為 *path independent* 若且唯若對於 D 中的任意封閉路徑 C 皆有 $\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = 0$。

接下來我們探討怎樣的 vector function $\mathbf{f}$ 會是 path independent。假設 $\mathbf{f}$ 是 conservative，即存在一個 scaler function f 使得 $\mathbf{f} = \nabla f$。我們用三維的情形來解釋，即設 $\mathbf{f} = [\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}]$。考慮路徑 C 的參數式為 $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$，起點為 $\mathbf{r}(t_0)$ 終點為 $\mathbf{r}(t_1)$。我們來看 $\mathbf{f}$ 在 C 的線積分轉成單變數實函數的積分式中，被積分的函數（integrand）$\mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)$ 會是怎樣的函數。將這些函數的坐標形式代入，我們有 $\mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)$ 會等於

$$\frac{\partial}{\partial x}f(r_1(t),r_2(t),r_3(t))r_1'(t) + \frac{\partial}{\partial y}f(r_1(t),r_2(t),r_3(t))r_2'(t) + \frac{\partial}{\partial z}f(r_1(t),r_2(t),r_3(t))r_3'(t)$$

利用多變數函數的 chain rule，這就是 $f(r_1(t),r_2(t),r_3(t))$ 對 t 的微分，也就是說 $f(\mathbf{r}(t))$ 就是 $\mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)$ 的反導函數，也因此 $\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_0}\mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = f(\mathbf{r}(t_1)) - f(\mathbf{r}(t_0))$. 我們得到以下的定理。

Theorem 5.4.4. 假設 *vector function* $\mathbf{f}$ 在區域 D 中是 *scaler function* f 的 *gradient*，即 $\mathbf{f} = \nabla f$。則對 D 中任何以 P 點為起點，Q 點為終點的路徑 C，皆有

$$\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = f(Q) - f(P).$$

由此定理我們知道，當一個 vector function 是 conservative，它就是 path independent 而且只要知道其 potential function，代入任何 path 的起點和終點就可得其線積分。我們看以下的例子。

Example 5.4.5 (課本 10.2.1)**.** 考慮 $\mathbf{f}(x,y,z) = [2x, 2y, 4z]$，很容易看出它是 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ 的 gradient。因此對任何起點為 $(0,0,0)$ 終點為 $(2,2,2)$ 的 path C，皆有 $\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = f(2,2,2) - f(0,0,0) = 16$。

我們特地找兩個 path C_1, C_2 檢查。考慮 C_1 的參數式為 $\mathbf{r}_1(t)=(t,t,t)$ 則起點為 $\mathbf{r}_1(0)$ 終點為 $\mathbf{r}_1(2)$；C_1 的參數式為 $\mathbf{r}_2(t)=(2t,2t^2,2t^3)$ 則起點為 $\mathbf{r}_2(0)$ 終點為 $\mathbf{r}_2(1)$。我們有

$$\begin{aligned}\int_{C_1}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^2 [2t,2t,4t]\cdot[1,1,1]\,dt=\int_0^2 8t\,dt=16,\\ \int_{C_2}\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 [4t,4t^2,8t^3]\cdot[2,4t,6t^2]\,dt=\int_0^1 (8t+16t^3+48t^5)\,dt=16.\end{aligned}$$

♯

Question 5.18. 做課本習題 *10.2.4, 10.2.8*。說明被積向量函數為 *conservative*，找出其 *potential function* 並求線積分。

我們也好奇，是否 $\mathbf{f}$ 在一區域 D 為 path independent，也可推得 $\mathbf{f}$ 在 D 為 conservative。這是正確的，事實上我們可以找到一個定義域在 D 的 scaler function f 使得在 D 上任一點 Q 皆有 $\nabla f(Q)=\mathbf{f}(Q)$。首先固定 D 中的一點 P，則對 D 中任一點 Q，我們任選 D 中一個起點為 P 終點為 Q 的路徑 C 且令 $f(Q)$ 為 $\mathbf{f}$ 在 C 的線積分，即 $f(Q)=\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$。此時因 $\mathbf{f}$ 是 path independent，$f(Q)$ 的值與路徑無關，是一個確定的值。接著就可以用微積分基本定理證明 f 在 D 中都會使得 $\nabla f=\mathbf{f}$，證明的一些細節有點複雜這裡就略過了。

如何確認一個 vector function $\mathbf{f}$ 是否為 conservative 呢？前面我們提過若 $\mathbf{f}$ 是 conservative 且 f 為其 potential function，即 $\mathbf{f}=\nabla f$，則因 $\operatorname{curl}(\nabla f)=\mathbf{0}$，我們會有 $\operatorname{curl}\mathbf{f}=\mathbf{0}$。所以我們可以先檢查 $\operatorname{curl}\mathbf{f}$ 是否為零向量函數。若不是零向量函數，則一定不是 conservative；而若是零向量函數，我們就試著能否找到 scaler function f 使得 $\mathbf{f}=\nabla f$。我們看以下的例子。

Example 5.4.6 (課本 10.2.3)**.** 考慮 $\mathbf{f}=[f_1,f_2,f_3]=[2xyz^2, x^2z^2+z\cos(yz), 2x^2yz+y\cos(yz)]$。因為

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}=2x^2z+\cos(yz)-y\sin(yz)=\frac{\partial f_2}{\partial z};\quad \frac{\partial f_1}{\partial z}=4xyz=\frac{\partial f_3}{\partial x};\quad \frac{\partial f_2}{\partial x}=2xz^2=\frac{\partial f_1}{\partial y},$$

我們知 $\operatorname{curl}\mathbf{f}=\mathbf{0}$。現假設 $\mathbf{f}=\nabla f$，亦即

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xyz^2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2z^2+z\cos(yz),\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2x^2yz+y\cos(yz).$$

我們先從 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2$ 著手，將 x,z 看成常數對 y 積分得 $f(x,y,z)=x^2z^2y+\sin(yz)+g(x,z)$ 其中 $g(x,z)$ 為僅有 x,z 為變數的 scaler function。再將 $f(x,y,z)$ 對 x 偏微得 $2xyz^2+\dfrac{\partial g}{\partial x}=f_1(x,y,z)$，故得 $\frac{\partial g}{\partial x}=0$，亦即 $g(x,z)=h(z)$ 為以 z 為變數的實函數。所以再將 $f(x,y,z)$ 對 z 偏微得 $2x^2yz+y\cos(yz)+h'(z)=f_3(x,y,z)$，因此得 $h'(z)=0$。由於我們只要找到一個 $f(x,y,z)$ 滿足 $\nabla f=\mathbf{f}$，所以我們可以選 $g(x,z)=h(z)=0$，因此得 $f(x,y,z)=x^2z^2y+\sin(yz)$。

知道 $\mathbf{f}$ 是 conservative 後，就可由 Theorem 5.4.4 知 $\mathbf{f}$ 是 path independent。故若 C 為一個從點 $(0,0,1)$ 到 $(1,\pi/4,2)$ 的 path，我們可以得線積分

$$\int_C 2xyz^2\,dx+(x^2z^2+z\cos(yz))\,dy+(2x^2yz+y\cos(yz))\,dz=f(1,\pi/4,2)-f(0,0,1)=\pi+1.$$

♯

Question 5.19. 做課本習題 *10.2.15, 10.2.18*。

我們很自然的會問是否 $\mathrm{curl}\,\mathbf{f}=\mathbf{0}$ 就表示 $\mathbf{f}$ 是 conservative？答案是否定的，我們看以下的例子。

Example 5.4.7 (課本 10.2.4)**.** 考慮 $\mathbf{f}(x,y,z)=[-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0]$。我們確實有 $\mathrm{curl}\,\mathbf{f}=\mathbf{0}$，但是考慮在 xy 平面上以原點為圓心的單位圓所形成的封閉路徑 C 其參數式為 $\mathbf{r}(t)=(\cos t,\sin t,0)$, $0\le t\le 2\pi$。則 $\mathbf{f}$ 在此封閉路徑的線積分為

$$\int_0^{2\pi}[-\sin t,\cos t,0]\cdot[-\sin t,\cos t,0]\,dt=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=2\pi\neq 0.$$

所以由 Theorem 5.4.4 知 $\mathbf{f}$ 不是 conservative。事實上 $\mathbf{f}$ 的定義域不包含點任何 z 軸上的點，$\mathbf{f}$ 在任何繞過 z 軸的封閉路徑其線積分都不為 0。 ♯

從這個例子我們知道由 $\mathrm{curl}\,\mathbf{f}=\mathbf{0}$，未必可推得 $\mathbf{f}$ 是 conservative。不過如果已知 $\mathbf{f}$ 在一個 *simply connected* 的區域皆滿足 $\mathrm{curl}\,\mathbf{f}=\mathbf{0}$，則在此區域 $\mathbf{f}$ 就會是 conservative。所謂 simply connected 的區域，指的就是該區域中任意的封閉曲線都可以在該區域中連續地縮成一點。例如球面就會使 simply connected；但像甜甜圈（或救生圈）的 torus，就不是 simply connected。又例如剛才的例子，只要是繞 Y 週一圈的曲線，都無法縮成一點，所以也不是 simply connected。以後我們學習了“Stokes' theorem”後就可以理解為何當 $\mathrm{curl}\,\mathbf{f}$ 在一個 simply connected 區域皆為零向量 $\mathbf{0}$，則 $\mathbf{f}$ 在此區域為 conservative。

5.4.1. Green's Theorem. 當我們處理一個定義坐標平間中的一個封閉區域的二維 vector function 在此區域邊界路徑的線積分，可以利用 Green's Theorem 將之轉化成一個兩個變數的實函數在此區域的雙重積分。要注意這並不意味著線積分比雙重積分難處理，事實上當雙重積分不好處理時，我們也可利用 Green's Theorem 將之轉成線積分來處理。總之，Green's Theorem 是可以將線積分和雙重積分兩邊靈活運用的有用工具。

Green's Theorem 可套用的函數必須是一階連續可微的函數，而積分的區域必須是邊界是由有限多個平滑曲線所組成的封閉區域。為了方便起見，底下談的函數以及區域都符合這些要求，就不再強調了。現考慮封閉區域 R，其邊界的路徑方向為 R 的內部永遠在路徑的左側，令整個這些封閉的路徑為 C。假設 $\mathbf{f}(x,y)=[f_1(x,y),f_2(x,y)]$ 由於要和雙重積分一起探討，所以這裡線積分傳統上是用前面提過 dx,dy 的形式表示，即 $\oint_C\mathbf{f}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\oint_C(f_1(x,y)\,dx+f_2(x,y)\,dy)$。積分符號上的圈圈僅強調是封閉區域的線積分。Green's Theorem 是說這個線積分會和 scaler function $\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(x,y)$ 在 R 這個區域的雙重積分是一致的，也就是說

$$\iint_R\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(x,y)\,dx\,dy=\oint_C(f_1(x,y)\,dx+f_2(x,y)\,dy).$$

這個定理的證明頗複雜的，主要是一般封閉區域的雙重積分其上下界未必可以用 $y=f(x)$ 這樣的函數表示，所以必需將此區域分割成一塊一塊才能利用微積分基本定理處理。這個證明，我們就不深談了。

Example 5.4.8 (課本 10.4.1)**.** 考慮 $f_1(x,y)=y^2-7y$, $f_2(x,y)=2xy+2x$，以及以原點為圓心的單位圓依逆時鐘方向前進的路徑 C。我們要求線積分 $\oint_C(y^2-7y)\,dx+(2xy+2x)\,dy$。首先考慮 C 的參數式 $\mathbf{r}(t)=(\cos t,\sin t)$ 可考慮起點為 $t=0$ 時，終點為 $t=2\pi$。故

$$\begin{aligned}\oint_C(y^2-7y)\,dx+(2xy+2x)\,dy &= \int_0^{2\pi}-(\sin^2 t-7\sin t)\sin t+(2\cos t\sin t+2\cos t)\cos t\,dt.\\ &= \int_0^{2\pi}2\cos^2 t\sin t+2\cos^2+7\sin^2 t-\sin^3 t\,dt. \qquad (5.2)\end{aligned}$$

最後牽涉到處理一些三角函數的不定積分，有點複雜（等一下我們再處理，順便複習一下微積分）。由於 $\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x}-\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)(x,y)=(2y+2)-(2y-7)=9$ 我們可以利用 Green's Theorem 得到此線積分等於 $\iint_R 9\,dxdy$ 即 9 倍的單位圓面積 9π。

現在讓我們回到剛才的線積分最後得到的定積分，確認 Green's Theorem 確實得到兩積分相等也回顧一下如何處理正餘弦函數高次的反導函數。當正餘弦的次數為奇數次時，我們可以將其中一個與 dt 合併，再利用變換變數。例如

$$\int\sin^3 t\,dt=-\int\sin^2 t\,d\cos t=-\int(1-\cos^2 t)\,d\cos t=-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}+C,$$

$$\int\cos^2 t\sin t\,dt=-\int\cos^2 t\,d\cos t=-\frac{\cos^3 t}{3}+C.$$

而當次數是偶數時，可利用倍角公式，即 $\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$, $\cos^2 t=\dfrac{\cos 2t+1}{2}$，處理。例如

$$\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int(\cos 2t+1)dt=\frac{\sin 2t+2t}{4}+C, \int\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)dt=\frac{2t-\sin 2t}{4}+C.$$

所以由式子 (5.2) 我們有

$$\oint_C(y^2-7y)\,dx+(2xy+2x)\,dy=(-\frac{2}{3}\cos^3 t+\frac{-5\sin^2 t}{4}+\frac{9}{2}t+\cos t-\frac{\cos^3 t}{3})|_0^{2\pi}=9\pi.$$

♯

Question 5.20. 請直接用線積分計算課本習題 *10.4.2, 10.4.3*（路徑 C 為 R 的外圍沿逆時鐘方向）。

Question 5.21. 利用 *Green's Theorem* 計算課本習題 *10.4.2, 10.4.3*（驗證是否與 *Question 5.20* 一致）。