Example 5.5.3 (課本 10.7.2)**.** 考慮 $\mathbf{f}(x,y,z) = [7x, 0, -z]$ 在以原點為球心半徑為 2 的球面 S 的面積分。首先寫下球面參數式 $\mathbf{r}(u,v) = (2\cos v\cos u, 2\cos v\sin u, 2\sin v)$，其中 $0 \le u \le 2\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2}$。可得此球面的 normal vector field 為 $\mathbf{N}(u,v) = 4\cos v[\cos v\cos u, \cos v\sin u, \sin v]$ (參見 Example 5.2.3)。因此得面積分為

$$\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\int_0^{2\pi}[14\cos v\cos u, 0, -2\sin v]\cdot[4\cos^2 v\cos u, 4\cos^2 v\sin u, 4\cos v\sin v]\,du\,dv$$

$$= \int_{\pi/2}^{-\pi/2}\int_0^{2\pi}(56\cos^3 v\cos^2 u - 8\cos v\sin^2 v)du\,dv. \quad (5.3)$$

感覺有點複雜，我們先用 Divergence Theorem 轉換成三重積分處理，再回來驗證兩者結果一致。

注意 $\cos v$ 在此範圍皆不小於 0，故此法向量函數 $\mathbf{N}(u,v)$ 皆朝著球體 T 外側，所以可直接套用 Divergence Theorem (不必變號)。因 $\operatorname{div}\mathbf{f}(x,y,z) = 7 - 1 = 6$，故所要求的面積分應為 6 倍的球體體積，即

$$\iiint_T \operatorname{div}\mathbf{f}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T 6\,dx\,dy\,dz = 6\times\frac{4}{3}\pi\times 2^3 = 64\pi.$$

我們回到原來計算的面積分 (式子 (5.3)) 是否為 64π，驗證 Divergence Theorem。由於 $\cos^2 u = \dfrac{\cos 2u + 1}{2}$ 所以式子 (5.3) 等於

$$56\pi\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\cos^3 v\,dv - 16\pi\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\cos v\sin^2 v\,dv. \quad (5.4)$$

再利用 $\cos^3 v\,dv = (1-\sin^2 v)d(\sin v)$ 以及 $\cos v\sin^2 v\,dv = \sin^2 v\,d(\sin v)$ 可得上式 (5.4) 為 $56\pi(\sin v - (\sin^3 v)/3) - 16\pi(\sin^3 v)/3\,|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 64\pi$ ♯

Question 5.26. 做課本習題 *10.7.9, 10.7.10*。

Question 5.27. 利用 *Divergence Theorem* 求課本習題 *10.7.14* 的 *surface integral*。為了了解此 *surface integral* 的複雜度，請寫下所要積的“三個”*surfaces* 的參數式 (不必真的算面積分)。

前面的例子和習題都讓我們了解到，要處理一個 vector function 在封閉曲面的面積分若有困難，可以用 divergence theorem 將其轉化成其 divergence 在此曲面內部的三重積分來處理。當然了，如同 Green's Theorem，也有可能是一個 scaler function 在一個封閉區域的三重積分很難處理，我們也可以用 divergence theorem 將其轉換成在此區域外圍的曲面的面積分來處理。例如，我們可以將一個求有界區域 T 的體積問題 (即三重積分 $\iiint_T 1\,dx\,dy\,dz$)，轉換成面積分來處理。也就是說，我們必須找到一個 vector function $\mathbf{f}(x,y,z)$ 使得 $\operatorname{div}\mathbf{f} = 1$。我們曾經在介紹 Green's Theorem 時提到類似的應用 (參見 Example 5.4.9 及其之前的說明)，這個部分就留作習題，讓大家體會學了一個數學的理論，如何做適當的推廣。

Question 5.28. 做課本習題 *10.8.7*。

Example 5.5.4. 我們用 divergence theorem 利用面積分來求底面為半徑是 a 的圓且高度為 h 的圓錐體（circular cone）體積。首先我們將此圓錐體置於空間坐標中。將頂點置於原點，圓錐中心軸在 z 軸上，底面在平面 $z=h$ 上（應該稱為頂面）。找到 Question 5.28 的 vector function $\mathbf{f}$ 滿足 $\operatorname{div}\mathbf{f}=1$ 後，我們要找到此圓錐外圍封閉曲面 S 的參數式，來幫我們計算 $\mathbf{f}$ 在 S 的面積分，以利用 divergence theorem （Question 5.28）來幫我們求得圓錐體體積。

我們可以將 S 分成 S_1,S_2 兩部分，S_1 是頂部的圓盤（disk）；S_2 是圓錐面（conical portion）。S_1 由於是平面 $z=h$ 上半徑為 a 的圓盤，其參數式可寫成 $\mathbf{r}_1(u,v)=(u\cos v,u\sin v,h)$，$0\leq u\leq a,\ 0\leq v\leq 2\pi$。這裡參數 u 表示圓盤是由半徑為 u 的圓（從半徑為 0 到半徑為 a 所形成），參數 v 表示的是這些圓是以逆時鐘從角度為 0 到角度為 2π 繞一圈所形成。而 z 坐標的 h 是此圓錐體的高，是常數不是變數。有了 S_1 的參數式，我們便可算 S_1 的法向量為

$$\frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial v}=[\cos v,\sin v,0]\times[-u\sin v,u\cos v,0]=[0,0,u].$$

由於 divergence theorem 的法向量要取朝著圓錐體的外部，所以 S_1 的法向量要選方向朝上的，即向量的 z 分量要大於等於 0。由於 $u\geq 0$，故算在 S_1 的面積分時要選 $N(u,v)=[0,0,u]$。

接下來我們來求圓錐面 S_2 的參數式，這個圓錐面也和圓盤一樣，是由一個圓一個圓堆疊出來的，但每個圓的高度不同。每個圓的半徑 u 和圓所在的高度（即 z 坐標）有關。我們考慮 xz-平面（即 $y=0$）和圓錐體所截的三角形，它是以直徑 $2a$ 為底，高為 h 的等腰三角形。所以當高為 z 時利用相似形我們有半徑 u 比 z 會等於 a 比 h，故得 $z=\frac{h}{a}u$。也因此可寫下 S_2 的參數式為 $\mathbf{r}_2(u,v)=(u\cos v,u\sin v,\frac{h}{a}u)$，$0\leq u\leq a,\ 0\leq v\leq 2\pi$。注意這裡 h,a 皆為常數。依此可得 S_2 的法向量為

$$\frac{\partial\mathbf{r}_2}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}_2}{\partial v}=[\cos v,\sin v,\frac{h}{a}]\times[-u\sin v,u\cos v,0]=[-\frac{h}{a}u\cos v,-\frac{h}{a}u\sin v,u].$$

由於 divergence theorem 的法向量要取朝著圓錐體的外部，所以 S_2 的法向量要選方向是朝下的，即向量的 z 分量要小於等於 0。由於 $u\geq 0$，故算在 S_2 的面積分時要選 $N(u,v)=[\frac{h}{a}u\cos v,\frac{h}{a}u\sin v,-u]$。

有了 S_1,S_2 的參數式與法向量，就可以利用 divergence theorem 以面積分來求體積了。這個部分一樣就留做習題囉！ $\sharp$

Question 5.29. 請利用 *Example 5.5.4* 的參數式與法向量做課本習題 *10.8.8*。

當 S 不是封閉曲面且 $\mathbf{f}=[f_1,f_2,f_3]$ 在 S 的面積分不好處理時，我們也可以利用 Divergence Theorem 幫我們處理。首先我們若能找到另一曲面 S' 使得 S 與 S' 圍出一封閉曲面。令此封閉曲面之內部為 T 且取曲面的法向量朝外，則由面積分的性質以及 Divergence Theorem，我們有

$$\iint\limits_S\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA+\iint\limits_{S'}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA=\iiint\limits_T\operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy\,dz.$$

（若 S 的法向量不是朝外則需加上負號）。因此若我們會計算 $\iint\limits_{S'} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA$ 以及 $\iiint\limits_{T} \operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy\,dz.$，就可得 $\iint\limits_{S} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA$ 了。

Example 5.5.5. 考慮 $\mathbf{f}(x,y,z)=[-1,-1,-1]$ 在拋物面 S：$z=1-(x^2+y^2)$, $z\geq 0$ 且法向量朝外的面積分。首先將 S 的參數式設為 $\mathbf{r}(u,v)=(u,v,1-u^2-v^2)$, $0\leq u^2+v^2\leq 1$，再利用 $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}=[1,0,-2u]$，$\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=[0,1,-2v]$，求得法向量為 $[2u,2v,1]$。由於法向量朝外，向量的 z 方向為正，故取 $\mathbf{N}(u,v)=[2u,2v,1]$，因此得面積分

$$\iint\limits_{S} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-v^2}}^{\sqrt{1-v^2}}(-2u-2v-1)\,du\,dv.$$

這個積分除非做適當的變數變換，否則不好求，我們改以 divergence theorem 處理。

令 S' 為 xy 平面以原點為圓心的單位圓內部，且令 T 為 S 和 S' 所圍的封閉區域，則 $S\cup S'$ 為 T 的邊界所圍成的曲面。將 S' 的法向量取 $[0,0,-1]$ 所以 $S\cup S'$ 的法向量皆朝著 T 的外部。由 Divergence Theorem 我們知

$$\iiint\limits_{T} \operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{S} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA+\iint\limits_{S'} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA.$$

由於 $\operatorname{div}\mathbf{f}=0$，我們得

$$\iint\limits_{S} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA=-\iint\limits_{S'} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dA=-\iint\limits_{S'}[-1,-1,-1]\cdot[0,0,-1]\,dA=-\iint\limits_{S'} dA=-\pi.$$

最後一個雙重積分是 π，因為 S' 為單位圓內部其面積為 π。 ♯

5.5.2. Stokes' Theorem. 在二維平面的一個封閉路徑的線積分可用 Green's Theorem 將之與此路徑內部區域的雙重積分相聯結。而對於三維空間中的一個封閉路徑的線積分，我們可以用 Stokes' Theorem 將它與此路徑內部區域的面積分相聯結。簡單來說 Green's Theorem 是處理平面的問題，而 Stokes' Theorem 是將之推廣到一般曲面的情況。

假設 S 是坐標空間中一個 piecewise smooth 的有向曲面，而 S 的邊界是 piecewise smooth 且為 simply connected 的封閉曲線。考慮此封閉曲線的一個有向路徑 C，並依此路徑方向依右手法則對 S 上選取法向量 $\mathbf{N}$，即右手手掌沿著路徑方向，則 $\mathbf{N}$ 的方向是沿著大拇指方向。對於一個 vector function $\mathbf{f}(x,y,z)=[f_1(x,y,z),f_2(x,y,z),f_3(x,y,z)]$，如果 $\mathbf{f}$ 是一階連續可微，則 Stokes' Theorem 告訴我們 $\mathbf{f}$ 在路徑 C 的線積分與 $\operatorname{curl}\mathbf{f}$ 在曲面 S 的面積分是相等的，即：

$$\iint\limits_{S} (\operatorname{curl}\mathbf{f})\cdot\mathbf{n}\,dA=\oint\limits_{C}\mathbf{f}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$

我們看一個例子驗證 Stokes' Theorem.

Example 5.5.6. 考慮 $\mathbf{f}(x,y,z)=[y,z,x]$，以及曲面 S 為拋物面（paraboloid）：

$$z=1-(x^2+y^2),\quad z\geq 0.$$

S 的邊界為 x,y 平面上以原點為圓心的單位圓，我們考慮此單位圓依逆時鐘旋轉的路徑 C。

首先我們處理 $\mathbf{f}$ 在 C 的線積分。利用 C 的參數式 $\mathbf{r}(t)=(\cos t,\sin t,0)$，我們有 $\mathbf{r}'(t)=[-\sin t,\cos t,0]$，故

$$\oint_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}[\sin t,0,\cos t]\cdot[-\sin t,\cos t,0]\,dt=-\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=-\pi.$$

接下來我們處理 $\operatorname{curl}\mathbf{f}(x,y,z)=[-1,-1,-1]$ 在 S 的面積分。注意由於 C 是逆時鐘的路徑，故依右手法則我們取 S 的法向量是朝上的，即 z 方向需大於等於 0。這個面積分不好處理，不過在 Example 5.5.5，我們利用 divergence theorem 確實算出其面積分為 $-\pi$。 ♯

由以上 Example 5.5.6 我們也看出，當初若 S 是以原點為圓心的單位球的上半球面，即 $S：x^2+y^2+z^2=1,\ z>0$，則依然會有 $\iint_S(\operatorname{curl}\mathbf{f})\cdot\mathbf{n}\,dA=-\pi$。這是因為不管是原來的抛物面或上半球面，它們有一樣的邊界 C。所以以後要利用 Stokes' Theorem 處理問題，我們也可考慮用較簡單的曲面來處理。Example 5.5.5 我們就是選 S' 為 xy 平面的單位圓內部這個最簡單的情形處理。

Question 5.30. 利用 *Stokes' Theorem* 求課本習題 *10.9.20* 的 *line integral*。為了了解此 *line integral* 的複雜度，請寫下所要積的“*4* 個” *curve* 的參數式 (不必真的算線積分)。

前面我們談論過若 vector function $\mathbf{f}$ 在一個區域 D 是 path independence，則 $\operatorname{curl}\mathbf{f}$ 在 D 上為零向量函數。我們曾經提到這個性質的反向未必成立，不過當 D 是 simply connected 是，則若 $\operatorname{curl}\mathbf{f}$ 在 D 上為零向量函數，則 $\mathbf{f}$ 在 D 是 path independence。要證明這個事實，我們要用到 Stokes' Theorem。回顧一下，我們要證明 $\mathbf{f}$ 在 D 是 path independence，等同於要證明對於 D 中任何的封閉路徑 C 皆有 $\oint_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=0$。現由於 D 為 simply connected，對任何封閉路徑 C，我們都可找到 D 中的一個曲面 S 使得 S 的邊界就是 C。因此由 Stokes' Theorem $\iint_S(\operatorname{curl}\mathbf{f})\cdot\mathbf{n}\,dA=\oint_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$. 再由 $\operatorname{curl}\mathbf{f}$ 在 D 上為零向量函數，得證 $\oint_C \mathbf{f}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=0$。