Chapter 6

Fourier Analysis

傅立葉分析在工程與物理方面相當重要，尤其在於將其運用在解常微分方程（ODE）以及偏微分方程（PDE，partial differential equations）上。這一章，我們將簡單提及其基本概念及一般的應用，而不涉及其更一般的推廣（例如 Sturm-Liouville expansions）。

6.1. Fourier Series

傅立葉級數是傅立葉分析裡重要的中心概念，就是希望把一般的週期函數用簡單的正弦、餘弦函數來表達。

所謂週期函數（periodic function）指的是有一個固定週期該會重複的函數，亦即若對於函數 $f(x)$ 存在一正數 p 使得對所有 $x\in\mathbb{R}$ 皆有 $f(x+p)=f(x)$，便稱 $f(x)$ 為週期（period）為 p 的週期函數。由於當 p 是 $f(x)$ 的週期時對任意的正整數 n, np 也會是 $f(x)$ 的週期，所以我們都會關注 $f(x)$ 的最小週期，稱為 $f(x)$ 的 *fundamental period*。例如 2π 就是正弦函數 $\sin x$ 的 fundamental period。

Question 6.1. 做課本習題 *11.1.3*（不必管什麼是 *vector space*）；*11.1.4*（不必舉例）。

6.1.1. 週期為 2π 的情況. 既然 Fourier Series 是要用正弦、餘弦函數來表示週期函數，而正餘弦函數的週期為 2π，我們就先探討最簡單的情況，即週期為 2π 的週期函數的 Fourier Series. 當 $f(x)$ 的週期為 2π 考慮無窮級數

$$a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{6.1}$$

其中當 $n\in\mathbb{N}$ 時

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

式子 (6.1) 稱為 $f(x)$ 的 *Fourier series*，而 $a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots$ 稱為其 *Fourier coefficients*。得到這些係數的積分式稱為 *Euler formula*。由於 $f(x)$ 的週期是 2π，Euler formula 的積分式未必一定要從 $-\pi$ 積到 π，任何長度為 2π 的區間都可以（例如 0 到 2π），只是一般都習慣從 $-\pi$ 到 π 就是了！

要注意 Fourier series 是無窮級數，所以在一般情況對任意的 x 此級數未必收斂。即使收斂了，其極限值也未必會等於 $f(x)$。不過在一種情況的週期函數 $f(x)$ 可以確認其 Fourier series 是處處收斂的，且可確認其收斂值與 $f(x)$ 的關係，我們以定理的方式敘述如下。

Theorem 6.1.1. 假設 $f(x)$ 為週期 2π 的週期函數，且在區間 $-\pi \leq x \leq \pi$（或任何長度為 2π 的區間）僅有有限多個不連續點（即 *piecewise continuous*），且在每一點其左微分與右微分皆存在。則 $f(x)$ 的 *Fourier series* 必處處收斂，且 $f(x)$ 在點 x 為連續時其 *Fourier series* 的收斂值就是 $f(x)$；而在 $f(x)$ 不連續的點 x_0，其 *Fourier series* 的收斂值為在 x_0 的左極限與右極限的平均值，即 $\frac{1}{2}(f(x_0^-)+f(x_0^+))$。

一般來說，要證明一個無窮級數是收斂的並求其收斂值並不容易，所以這個定理的證明我們便略過了。不過之後我們會大致說明一下得到 Fourier coefficients 的 Euler formula 是如何得到的。當 $f(x)$ 滿足 Theorem 6.1.1 的條件時，由於 Fourier series 在連續的點 x 都收斂到 $f(x)$，通常我們就直接用等式 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 來表示。接下來我們先看一個例子。

Example 6.1.2 (課本 11.1.1)**.** 考慮週期為 2π 的 periodic rectangular wave function 其在區間 $-\pi < x < \pi$ 的定義為

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0; \\ k, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

這個函數在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 只有在 $x = -\pi, 0, \pi$ 三點不連續，所以是 piecewise continuous. 又由於 $f(x)$ 在各點的左微分與右微分皆存在（事實上皆為 0），所以符合 Theorem 6.1.1 的條件。

接下來我們計算此函數的 Fourier series。由 Euler formula $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$（可由 $f(x)$ 在 $-\pi, \pi$ 之間與 x-軸所圍的面積上下相抵消，或直接積分）。而當 $n > 0$ 時

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{-k}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx + \frac{k}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx = 0.$$

同理

$$b_n = \frac{-k}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx + \frac{k}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{k}{n\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{-k}{n\pi}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} = \begin{cases} \frac{4k}{n\pi}, & \text{if } n \text{ is odd;} \\ 0, & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

故得到 $f(x)$ 的 Fourier series 為

$$\frac{4k}{\pi}\sin x + \frac{4k}{3\pi}\sin 3x + \cdots + \frac{4k}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)x + \cdots.$$

特別的當 $x = 0, \pm\pi$ 時此級數和為 0 恰等於在該點的左右極限的平均值（因 $f(-\pi^-) = k, f(-\pi^+) = -k$，$f(0^-) = -k, f(0^+) = k$，$f(\pi^-) = k, f(\pi^+) = -k$）。又 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 為連續，故得

$$f(\frac{\pi}{2}) = k = \frac{4k}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right).$$

我們有 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$ 這個有趣的結果。 $\sharp$

Question 6.2. 做課本習題 *11.1.21, 11.1.23*（不必畫圖，$x\cos nx$ 以及 $x\sin nx$ 的反導函數可用查表）。

接下來我們說明為何可用 Euler formula 得到 Fourier coefficients。首先我們介紹 *orthogonal system* 的概念，這個概念來自於線性代數內積垂直的概念（線性代數是用 orthogonal 來表示垂直而不是 perpendicular）。假設有一組向量 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ 兩兩互相垂直，即當 $i\neq j$ 時 $\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j=0$。若向量 $\mathbf{v}$ 可以寫成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的線性組合，即 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$，則我們可以利用內積，來求這些 c_i。例如要求 c_1，我們可以考慮 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1$，這是因為

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1=(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n)\cdot\mathbf{v}_1=c_1\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1,$$

所以 $c_1=\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}$. 同理對任意 $i=1,\ldots,n$，皆有 $c_i=\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i}$.

對於從 $-\pi$ 到 π 的積分，$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots,\cos nx,\sin nx,\ldots$ 也形成 orthogonal system。也就是說任取前述兩個相異函數相乘後從 $-\pi$ 到 π 的積分都是 0，亦即對任意 $m,n\in\mathbb{N}$, 我們有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx=0. \tag{6.2}$$

而當 $m\neq n$ 時

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0. \tag{6.3}$$

這些積分式都可由正餘弦函數的積化和差的公式推得。即

$$\begin{aligned}\cos mx\sin nx&=\frac{1}{2}(\sin(m+n)x-\sin(m-n)x)\\ \cos mx\cos nx&=\frac{1}{2}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)\\ \sin mx\sin nx&=\frac{1}{2}(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x).\end{aligned}$$

而這些式子皆可由大家熟悉的和角公式推得。我們也可由此推出

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 2nx+1)\,dx=\pi,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx=\pi. \tag{6.4}$$

利用式子 (6.2), (6.3), (6.4) 我們就可推得 Euler formula，即

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx))\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a_0\,dx=a_0,\\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a_0\cos nx+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx\cos nx+b_m\sin mx\cos nx))\,dx\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos^2 nx\,dx=a_n,\\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a_0\sin nx+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx\sin nx+b_m\sin mx\sin nx))\,dx\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin^2 nx\,dx=b_n.\end{aligned}$$

既然 Fourier series 能幫助我們處理週期函數，接下來我們就來看一個例子來說明如何用 Fourier series 處理一個二階 linear ODE 其 input 為週期函數的情形。

Example 6.1.3 (課本 11.3.1)**.** 考慮二階 linear ODE：$y''+0.05y'+25y=r(t)$ 其中 $r(t)$ 為週期為 2π 的週期函數且 $r(t)=\begin{cases} t+(\pi/2), & \text{if } -\pi<t<0; \\ -t+(\pi/2), & \text{if } 0<t<\pi. \end{cases}$ 我們可以求得 $r(t)$ 的 Fourier series 為 $\frac{4}{\pi}(\cos t+\frac{1}{9}\cos 3t+\frac{1}{25}\cos 5t+\cdots)$ 由於方程式是線性的，我們可以先個別解 Fourier series 的每一項再將各項所得之解加起來（如果會收斂的話），就可得 ODE 之解。換言之，我們先解 ODE：$y''+0.05y'+25y=\frac{4}{n^2\pi}\cos nt$, $n=1,3,5,\ldots$. 我們可以用 undetermined coefficient 的方法解這些 nonhomogeneous ODE，也就是說對每一個 n 考慮 particular solution $y_n=A_n\cos nt+B_n\sin nt$，再代入方程式解得 $A_n=\frac{4(25-n^2)}{n^2\pi D_n}$, $B_n=\frac{0.2}{n\pi D_n}$，其中 $D_n=(25-n^2)^2+(0.05n)^2$。如果 $y=y_1+y_3+y_5+\cdots$ 是均勻收斂（uniform convergent），則由於 y 的微分就是這些 y_n 微分在加起來，所以 y 就會是此 ODE 的一個 particular solution。由於 y_n 的絕對值等於 $\sqrt{A_n^2+B_n^2}=\frac{4}{n^2\pi\sqrt{D_n}}$ 小於 $\frac{4}{n^2}$，我們知 $y_1+y_3+y_5+\cdots$ 確為均勻收斂。 $\sharp$

Question 6.3. 做課本習題 *11.3.14*（不必畫圖，$r(t)$ 的 *Fourier series* 可直接套用 *Example 6.1.2* 的結果，解只要寫到 $n=3$ 即可）。