還有一種情況是，我們會想利用 Fourier series 處理一個函數在某特定區間的問題。這個函數未必是週期函數，如何有其 Fourier series 呢？假設我們要探討的是函數 $f(x)$ 在 0 到 L 之間的情況。此時，最直接的想法，就是利用 $f(x)$ 在 0 到 L 之間的取值，將 $f(x)$ 看成一個週期為 L 的週期函數。不過這往往在計算上較為複雜。要簡化計算，我們可以用前面所提偶函數、奇函數的看法。將 $f(x)$ 視為週期為 $2L$ 的偶函數（當 $-L<x<0$ 時，令 $f(x)=f(-x)$），稱為 *even periodic extension*。也可將 $f(x)$ 視為週期為 $2L$ 的奇函數來處理（當 $-L<x<0$ 時，令 $f(x)=-f(-x)$）稱為 *odd periodic extension*。這樣的作法，一般稱為 *half-range expansion*。

Example 6.1.7 (課本 Example 12.2.6)**.** 考慮函數

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{L}x, & \text{if } 0<x<\dfrac{L}{2};\\[2ex] \dfrac{2k}{L}(L-x), & \text{if } \dfrac{L}{2}<x<L.\end{cases}$$

首先我們考慮 even periodic extension，此時 $a_0=\dfrac{2k}{L^2}(\int_0^{L/2}x\,dx+\int_{L/2}^{L}(L-x)\,dx)=\dfrac{k}{2}$. 而當 $n\in\mathbb{N}$ 時，$a_n=\dfrac{4k}{L^2}(\int_0^{L/2}x\cos\dfrac{n\pi x}{L}\,dx+\int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\dfrac{n\pi x}{L}\,dx)$，利用分部積分可得

$$f(x)=\frac{k}{2}-\frac{16k}{\pi^2}(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{L}x+\frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi}{L}x+\cdots).$$

至於 even periodic extension，僅需考慮 $b_n=\dfrac{4k}{L^2}(\int_0^{L/2}x\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx+\int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx)$，可得 $f(x)=\dfrac{8k}{\pi^2}(\dfrac{1}{1^2}\sin\dfrac{\pi}{L}x-\dfrac{1}{3^2}\cos\dfrac{3\pi}{L}x+\dfrac{1}{5^2}\sin\dfrac{5\pi}{L}x-\dfrac{1}{7^2}\cos\dfrac{7\pi}{L}x+\cdots)$. ♯

Question 6.8. 做課本習題 *11.2.28*（請分別畫出其 *even periodic extension* 以及 *odd periodic extension* 在 $-L<x<L$ 的圖形）。

Question 6.9. 做課本習題 *11.2.29*（請分別畫出其 *even periodic extension* 以及 *odd periodic extension* 在 $-\pi<x<\pi$ 的圖形）。

Question 6.10. 請利用偶函數、奇函數的概念回答以下問題。

(1) 試問課本習題 *11.4.2* 和 *11.4.3* 的函數的 *Fourier series* 分別會和 *Question 6.8* 在 $L=\pi$ 時所得的 *Fourier cosine series* 和 *Fourier sine series* 其中的哪一個是一樣的？

(2) 試問為何 *Question 6.9* 的 *Fourier sine series* 會是 $\sin x$？函數 $f(x)=\cos x,\ 0<x<\pi$ 的 *Fourier cosine series* 會是 $\cos x$ 嗎？

6.1.4. Fourier Series 的估計. Fourier series 是一個無窮級數，要計算其值我們當然只會加到有限項，也因此我們僅能得到估計值。所以必須了解估計的誤差。這裡為了方便起見，我們僅探討週期為 2π 的情形。至於一般的週期情形，如前面所探討，僅是變數的變換，請大家自行推導。

假設 $f(x)$ 的 Fourier series 為 $f(x)=a_0+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$。我們首先探討，若固定加到 $n=N$ 的情況對於任意的 A_n,B_n，誤差的情況如何。也就是說考慮任意的 $A_0,A_1,B_1,\ldots,A_n,B_n$ 令 $F(x)=A_0+\sum_{n=1}^{N}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$，我們要了解利用 $F(x)$ 估計 $f(x)$ 在 $-\pi<x<\pi$ 這個區間的誤差情況。當然我們無法預期在每一個點都估計的很好，而是期望在 $-\pi<x<\pi$ 這個區間整體的偏差情況不要太大，所以這個誤差 E 我們是用所謂的"最小平方誤差"（*minimal square error*），即

$$E=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-F(x))^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)F(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}F(x)^2\,dx$$

來計算。利用 $\cos nx,\sin nx$ orthogonal 的性質（式子 (6.2), (6.3), (6.4)），可推得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)F(x)\,dx=\pi(2A_0a_0+\sum_{n=1}^{N}(A_na_n+B_nb_n));\quad \int_{-\pi}^{\pi}F(x)^2\,dx=\pi(2A_0^2+\sum_{n=1}^{N}(A_n^2+B_n^2)).$$

也因此推得

$$E=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx+\pi\left(2A_0(A_0-2a_0)+\sum_{n=1}^{N}(A_n(A_n-2a_n)+B_n(B_n-2b_n))\right).$$

特別的，當我們考慮 $F^*(x)=a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$（即選取 $A_0=a_0,A_1=a_1,B_1=b_1,\ldots,A_n=a_n,B_n=b_n$），所得的誤差為

$$E^*=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx-\pi\left(2a_0^2+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right).$$

而這個誤差與一般的誤差相比較得

$$E-E^*=\pi\left(2(A_0-a_0)^2+\sum_{n=1}^{N}((A_n-a_n)^2+(B_n-b_n)^2)\right)\geq 0.$$

我們有以下的定理：

Theorem 6.1.8 (Minimum Square Error)**.** 假設週期為 2π 的週期函數 $f(x)$ 的 *Fourier series* 為 $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. 固定 N，在形如 $F(x)=A_0+\sum_{n=1}^{N}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$ 的函數中，以 $F^*(x)=a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，在 $-\pi<x<\pi$ 這個區間的誤差最小，且其誤差為

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-F^*(x))^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx-\pi\left(2a_0^2+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right).$$

由於 $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-F^*(x))^2\,dx\geq 0$，故由此定理知

$$2a_0^2+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx.$$

這個不等式稱為“Bessel's inequality”。當 N 趨近於無窮大時，此不等式會變成等式，稱為“Parseval's identity”，即

$$2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx.$$

Example 6.1.9 (課本 Example 11.4.1)**.** 考慮函數 $f(x)=x+\pi$ 在 $-\pi<x<\pi$ 的情形。利用 $f(x)-\pi=x$ 是奇函數，我們計算 $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n}$. 得 $f(x)$ 的 Fourier series 為 $\pi+2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$。令 $F(x)=\pi+2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{(-1)^{N+1}}{N}\sin Nx)$，則由於

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2\,dx=\frac{(x+\pi)^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{8}{3}\pi^3,$$

算到第 N 項的最小平方誤差（minimal square error）為

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2\,dx-\pi\left(2\pi^2+\sum_{n=1}^{N}\frac{4}{n^2}\right)=\frac{2}{3}\pi^3-\pi\sum_{n=1}^{N}\frac{4}{n^2}.$$

經計算，當 $N=10,100,1000$ 誤差值分別大約為 1.2, 0.12, 0.012.

另外，利用 $\dfrac{2}{3}\pi^3-\pi\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\dfrac{4}{n^2}\geq 0$，我們有 Bessel's inequality

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{N^2}\leq\frac{1}{6}\pi^2,$$

以及 Parseval's identity

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{1}{6}\pi^2$$

（參考 Question 6.7，即課本習題 11.2.20，有同樣結果）。 $\sharp$

Question 6.11. 利用 *Example 6.1.2*（課本 *Example 11.1.1*）所得的 *Fourier series* 做課本習題 *11.4.5*（有限級數寫到 $N=5$，且寫出 $N=5$ 的最小平方誤差，用 π 來表示即可，不必用小數估計）。

Question 6.12. 利用 *Example 6.1.2*（課本 *Example 11.1.1*）所得的 *Fourier series* 做課本習題 *11.4.11*（證明等式即可，不必用部分和估算）。