6.3.2. Fourier Transform. 當一個函數 $f(x)$ 定義在整個實數但不是偶函數或奇函數時其 Fourier integral $f(x)=\int_0^\infty (A(w)\cos wx+B(w)\sin wx)\,dw$ 就無法像 Fourier cosine or sine integral 可以寫成一個單一的 w 函數的積分式。若要達到這目的，我們必須藉助於 complex Fourier integral，即

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iw(x-t)}dt\,dw.$$

注意這裡 $i=\sqrt{-1}$，以後就不再強調了。這個雙重積分是先對 t 積分，我們將與 t 無關的函數提出，可改寫成

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt\,dw.$$

此時，我們便可如同 Fourier cosine (sine) transform，令

$$\hat{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt,$$

稱為 $f(x)$ 的 *Fourier transform*，有時也用 $\mathscr{F}(f)$ 來表示。注意 Fourier cosine transform 的係數 $\sqrt{\pi/2}$ 是將 $A(w)$ 的係數 $\pi/2$ 取幾何平均數 (即開根號)；而 Fourier transform 是將 complex Fourier integral 的係數 $1/2\pi$ 取幾何平均數 $1/\sqrt{2\pi}$ (這樣做是為了使得 Fourier transform 及其反向的 transform 有一樣的形式)。我們仍然沿用以 w 為變數的函數，來表示變換後的函數。要注意的是，$\hat{f}(w)$ 雖然定義域 w 的範圍是實數，不過其取值有可能是複數。

Example 6.3.3 (課本 Example 11.9.1)**.** 考慮 $f(x)=\begin{cases} k, & \text{if } |x|<a;\\ 0, & \text{if } |x|>a.\end{cases}$ 在 Example 6.3.1 中處理的 Fourier cosine transform 就是把定義在正實數的函數擴展到這個偶函數來處理，我們來看看其 Fourier transform 會和 Example 6.3.1 中的 Fourier cosine transform 有何關聯。

依定義 $\hat{f}(w)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-a}^{a} ke^{-iwt}dt$。我們曾經提及，函數 e^z 定義在複數 z 上對 z 的微分仍為 e^z，所以這裡 e^{-iwt} 對 t 的反導函數仍為 $\dfrac{e^{-iwt}}{-iw}$，故

$$\hat{f}(w)=\frac{k}{-i\sqrt{2\pi}w}e^{-iwt}\Big|_{t=-a}^{a}=\frac{ik}{\sqrt{2\pi}w}(e^{-iwa}-e^{iwa}).$$

又由於 $e^{-iwa}=\cos(-wa)+i\sin(-wa)$, $e^{iwa}=\cos(wa)+i\sin(-wa)$，再由 $\cos(-wa)=\cos(wa)$，$\sin(-wa)=-\sin(wa)$，得

$$\mathscr{F}(f)=\hat{f}(w)=\frac{ik}{\sqrt{2\pi}w}(-2i\sin(wa))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{w}\sin wa.$$

與 Example 6.3.1 的 Fourier cosine transform 相一致。 ♯

這個例子，Fourier transform 是實函數，不過我們提過 Fourier transform 有可能會是複數函數，我們看以下的例子。

Example 6.3.4 (課本 Example 11.9.2)**.** 給定正實數 k，考慮函數 $f(x)=\begin{cases} e^{-kx}, & \text{if } x>0;\\ 0, & \text{if } x<0.\end{cases}$ 注意，在 Example 6.3.2 中我們考慮的是 $f(x)$ 定義域限制在正實數的部分，再擴展成偶函數，求其 Fourier cosine transform。此處 $f(x)$ 在負實數部分其值皆為 0，因此 $f(x)$ 不

是偶函數，也不是奇函數，所以不會有 Fourier cosine transform 也不會有 Fourier sine transform。

依定義

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-kt} e^{-iwt}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(k+iw)t}}{-(k+iw)}\Big|_{t=0}^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+iw)}.$$

注意 $f(x)$ 的 Fourier transform $\hat{f}(w)$ 是一個複數值函數。也因此與 Example 6.3.2 的 Fourier cosine transform 不同。事實上 $\hat{f}(w)$ 可改寫為

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+iw)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{k-iw}{(k+iw)(k-iw)} \right) = \frac{k-iw}{\sqrt{2\pi}(k^2+w^2)}.$$

Example 6.3.2 的 Fourier cosine transform 是 $\hat{f}(w)$ 實部的兩倍（因為在算 Fourier cosine transform 時是將函數的負實數部分“複製”正實數部分）。 $\sharp$

Question 6.20. 做課本習題 *11.9.3*。

接下來，我們來看 Fourier transform 的性質。當 $f(x), g(x)$ 皆有 Fourier integral，之前曾提及對於任意的實數 a, b，函數 $af(x)+bg(x)$ 也有 Fourier integral，所以利用積分線性的性質，我們也有以下的線性性質：

$$\mathscr{F}(af+bg) = a\mathscr{F}(f) + b\mathscr{F}(g).$$

同樣的，我們也要了解 Fourier transform 對導函數的影響。當然我們要假設 $f(x), f'(x)$ 都符合有 Fourier integral 的條件，另外要加上 $f(x)$ 連續的以及 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ 的假設（大部分 absolutely integrable 的函數都會滿足）。

考慮 $f'(x)$ 的 Fourier transform $\mathscr{F}(f') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f'(t) e^{-iwt}\, dt$. 我們需處理 $f'(t)e^{-iwt}$ 對 t 的反導函數，即不定積分 $\int f'(t)e^{-iwt}\, dt$,。由於 $f(x)$ 是連續的，我們可以利用分部積分：$u = e^{-iwt}$; $dv = f'(t)\, dt$，此時 $du = -iwe^{-iwt}\, dt$, $v = f(t)$。所以

$$\int f'(t)e^{-iwt}\, dt = f(t)e^{-iwt} - \left(-iw \int f(t)e^{-iwt}\, dt \right).$$

也因此

$$\int_{-\infty}^\infty f'(t)e^{-iwt}\, dt = f(t)e^{-iwt}\Big|_{t=-\infty}^\infty + iw \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-iwt}\, dt = iw \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-iwt}\, dt.$$

注意這裡我們用到了 $t \to \pm\infty$ 時 $f(t) \to 0$ 以及 $|e^{-iwt}| = 1$。依照 Fourier transform 的定義，我們得

$$\mathscr{F}(f') = iw\mathscr{F}(f). \tag{6.15}$$

當然了我們也可討論 Fourier transform 對二階導函數的影響。因為要考慮的是 $f'(x)$ 的微分 $f''(x)$ 所以若要套用 $\mathscr{F}$，則 $f'(x), f''(x)$ 就必須分別符合前面 $f(x), f'(x)$ 所相對應的條件。在此條件下我們就可套用式子 (6.15)，利用 $i^2 = -1$ 得到

$$\mathscr{F}(f'') = -w^2\mathscr{F}(f). \tag{6.16}$$

如預期，式子 (6.15), (6.16) 在處理微分方程時會很有用，同樣的它也可以幫我們求一些函數的 Fourier transform（要注意連續性）。我們看以下的例子。

Example 6.3.5 (課本 Example 11.9.3)**.** 經由查表（課本 11.9.10 Table III(6)），我們知 $\mathscr{F}(e^{-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-w^2/4}$。我們要用這個結果求 $\mathscr{F}(xe^{-x^2})$。首先令 $f(x) = e^{-x^2}$。注意 $f(x)$ 為連續且符合 absolutely integrable 以及 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ 等性質，且 $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ 也符合 absolutely integrable 等有 Fourier integral 的性質，所以我們可以套用式子 (6.15) 以及線性性質，得

$$\mathscr{F}(xe^{-x^2}) = -\frac{1}{2}\mathscr{F}(f') = -\frac{1}{2}iw\mathscr{F}(f) = -\frac{iw}{2\sqrt{2}}e^{-w^2/4}.$$

♯

Question 6.21. 做課本習題 *11.9.12*（*formula 5 in Table III* 指的就是 *Example 6.3.4* 的結果）。

利用 Fourier transform 處理問題，所得的以 w 為變數的函數當然需要還原成以 x 為變數的函數，這個還原的過程便稱為 inverse Fourier transform。觀察 Fourier transform 的定義，若 $\hat{f}(w)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier transform，則由 $f(x)$ 的 complex Fourier integral 表示法可得

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt\,dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{iwx}\,dw.$$

因此，若我們知道 $g(w)$ 會是某個函數的 Fourier transform，便可利用所謂的 *inverse Fourier transform*（用 $\mathscr{F}^{-1}$ 表示）找到這個函數。也就是說，利用積分

$$\mathscr{F}^{-1}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(w)e^{iwx}\,dw.$$

所得的函數 $f(x)$ 就會滿足 $\hat{f}(w) = g(w)$。

在處理 inverse Fourier transform 的問題時，常常會遇到的是兩個已知函數 $f_1(x), f_2(x)$ 的 Fourier transforms $\hat{f}_1(w), \hat{f}_2(w)$ 相乘的問題，也就是要求 $\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}_1\cdot\hat{f}_2)$。我們在探討 Laplace transform 也提及一樣的問題，這個反向回來的函數雖然不會是 $f_1(x)$ 乘以 $f_2(x)$，不過仍與 $f_1(x), f_2(x)$ 有關，稱為它們的 *convolution* 用 $f_1 * f_2$ 來表示，其定義為

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(x-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\tau)f_2(\tau)\,d\tau.$$

這兩個積分式會一樣，可以直接用變換變數 $u = x-\tau$ 證得。要注意，Laplace transform 的 convolution 和 Fourier transform 的 convolution 不同，不過很相似（都是利用同樣的積分性質）。

我們看看 $(f_1 * f_2)(x)$ 的 Fourier transform 為何？依定義

$$\mathscr{F}(f_1 * f_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1 * f_2(t)e^{-iwt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\right)e^{-iwt}\,dt.$$

交換積分順序並利用變換變數 $u = t-\tau$，改成對 u 與 τ 的積分，上一個積分式等於

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)e^{-iwt}\,dt\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(u)e^{-iw(u+\tau)}\,du\,d\tau.$$

接著我們看 $\hat{f}_1(w)$ 乘以 $\hat{f}_2(w)$ 為何？依定義

$$\mathscr{F}(f_1)\cdot\mathscr{F}(f_2)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)e^{-iw\tau}d\tau)(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_2(u)e^{-iwu}du).$$

比較這兩個積分式，我們得到

$$\mathscr{F}(f_1*f_2)=\sqrt{2\pi}\mathscr{F}(f_1)\cdot\mathscr{F}(f_2) \tag{6.17}$$

由於 $\mathscr{F}(f_1)=\hat{f}_1(w)$, $\mathscr{F}(f_2)=\hat{f}_2(w)$ 將式子 (6.17) 套用 inverse Fourier transform，可得

$$(f_1*f_2)(x)=\mathscr{F}^{-1}\left(\sqrt{2\pi}\hat{f}_1(w)\cdot\hat{f}_2(w)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_1(w)\cdot\hat{f}_2(w)e^{iwx}dw. \tag{6.18}$$

式子 (6.17), (6.18) 在處理微分方程時也常會用到。

偏微分方程

所謂偏微分方程 *partial differential equation* 簡稱為 PDE，談的是求解符合一些與偏微有關性質的多變數函數。通常這些多變數函數的變數包括時間 t 以及位置坐標 x,y,z 等。當然了解 PDE 一般來講比起 ODE 複雜多了，這一章我們僅涉及一些簡單的概念和常見的方程式。將重點放在如何利用前一章學的 Fourier analysis（Fourier series、Fourier integral、Fourier transform）運用在 PDE 上。

7.1. 基礎概念

解偏微分方程，通常會將要解的未知函數用 u 來表示，解出的 u 會是多變數函數。有時為了方便，偏微會用縮寫的方式表示，例如 $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 等。在方程式中對 u 做偏微最高的次數就稱為該 PDE 的階數（order）。

通常最常處理的是二階的情況，即 2nd-order PDE。又如同 ODE 的情況如果方程式中 u 和 u 的各個偏微，沒有互相相乘的情況發生，就稱之為 *linear* PDE。例如當 u 為 x,y 為變數的函數，下列形式就是 2nd-order linear PDE 的通式：

$$a_1(x,y)u_{xx} + a_2(x,y)u_{xy} + a_3(x,y)u_{yx} + a_4(x,y)u_{yy} + a_5(x,y)u_x + a_6(x,y)u_y + a_7(x,y)u = f(x,y).$$

這裡 $a_i(x,y)$ 和 $f(x,y)$ 皆為 x,y 的函數。當 $f(x,y) = 0$ 時此 linear PDE 就會稱為 *homogeneous*；否則便稱為 *nonhomogeneous*。另外當每個 $a_i(x,y)$ 都是常數時，便稱之為 linear PDE with *constant coefficients*。這裡，我們將只介紹一些重要的 2nd-order homogeneous linear PDE with constant coefficients.

當函數 u 在位置方面的變數只有一個（當然還有時間的變數 t，否則不會是多變數函數）我們稱為 *one-dimensional* equation。例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

（其中 c 為常數）分別是 one-dimensional wave equation 和 one-dimensional heat equation。函數 u 在位置方面的變數有兩個、三個，我們稱為 *two-dimensional*、*three-dimensional* equation，依此類推。例如含有時間 t 的 two-dimensional wave equation 以及不含時間 t 的 two-dimensional 和 three-dimensional Laplace equation 分別為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Question 7.1. 做課本習題 *12.1.3, 12.1.8*。

PDE 的解的情況當然比 ODE 多，而且和 ODE 很不一樣的是，它的解很可能在形式上差別都很大。例如 $u = x^2 - y^2$, $u = e^y \cos x$, $u = \ln(x^2 + y^2)$ 都是 two-dimensional Laplace equation 的解。通常要加上其他的條件才能得到一個 PDE 的唯一解。一般來說，有所謂的 *boundary conditions*，即限制 u 在邊界的值；另外若 u 和時間 t 有關，也有所謂的 *initial condition*，即 u 在 $t = 0$ 所限制的條件。

既然一般 PDE 的解有很多，對於 homogeneous linear PDE 就和 homogeneous linear ODE 一樣，又可以將這些解做線性組合，得到更多的解。也就是說，如果 u_1, u_2 是同一個 homogeneous linear PDE 的解，那麼對任意實數 c_1, c_2，皆可得 $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ 也是解。證明的方式和 ODE 的道理一樣，利用到偏微也有線性的性質，亦即

$$\frac{\partial(c_1 u_1 + c_2 u_2)}{\partial x} = c_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2(c_1 u_1 + c_2 u_2)}{\partial x \partial y} = c_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + c_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y}; \ldots$$

等等。這個性質，稱作 linear homogeneous PDE 的 *superposition principle*。

其實很多 PDE 的解法，還是利用 ODE 的概念處理。後面我們介紹一些解法中，都會利用到 ODE 的一些概念（所以要不時回顧一下）。接下來我們看兩個簡單，直接用 ODE 來解的例子。

Example 7.1.1 (課本 Example 12.1.2)**.** 解 PDE：$u_{xx} - u = 0$。這雖然是 2nd-order linear homogeneous PDE，不過由於僅牽涉到變數 x，我們可以將其他變數視為常數，解 homogeneous linear ODE with constant coefficients：$u'' - u = 0$。也就是，先考慮 characteristic equation $\lambda^2 - 1 = 0$，解得 $\lambda = 1, -1$，因此得 general solution $u = Ae^x + Be^{-x}$。所以當 u 為以 x, y 為變數的函數時，可得 $u(x,y) = A(y)e^x + B(y)e^{-x}$，其中 $A(y), B(y)$ 是任意以 y 為變數的函數。

檢查 $u_x = A(y)e^x - B(y)e^{-x}$ 以及 $u_{xx} = A(y)e^x + B(y)e^{-x}$ 確實符合此 PDE。 $\sharp$

Example 7.1.2 (課本 Example 12.1.3)**.** 找到函數 $u(x,y)$ 滿足 PDE：$u_{xy} = -u_x$。由於 u_{xy} 是先對 x 偏微，再對 y 偏微，所以我們先設 $p = u_x$，原方程式就變成 $p' = -p$，其中微分是對 y 的微分。這是一次 separable ODE，解得 $\ln|p| = -y + C_0(x)$，其中 $C_0(x)$ 是任意 x 的函數，亦即 $p = C(x)e^{-y}$。還原 $p = u_x$，變成要解 ODE $h' = C(x)e^{-y}$，其中微分為對 x 微分。若令 $D(x)$ 為 $C(x)$ 的反導函數，就可得 $h = D(x)e^{-y} + E(y)$，其中 $E(y)$ 為任意 y 的函數。所以解得 $u(x,y) = D(x)e^{-y} + E(y)$，其中 $D(x), E(y)$ 分別為任意 x 的函數以及 y 的函數。檢查 $u_x = D'(x)e^{-y}$ 以及 $u_{xy} = -D'(x)e^{-y}$ 確實符合此 PDE。 $\sharp$

Question 7.2. 做課本習題 *12.1.17, 12.1.18*。