接下來各節將介紹前面提過的 wave equation 以及 heat equation 的解法（我們不去解釋這些 equations 怎麼得到）。基本上，我們使用所謂的 *separating variables*（或稱 *product method*）處理，也就是將 u 寫成單變數函數的乘積，例如 $u(x,t)=F(x)G(t)$。這樣的方式就可以把問題變成如前面 Examples 的單變數 ODE 的問題，而解出無窮多個 $F_n(x),G_n(t)$，因而這些 $u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)$ 的線性組合也都會是此 PDE 的解（superposition principle）。我們可以將這些 $u_n(x,t)$ 的線性組合寫成無窮級數，以符合 PDE 的限制條件（如 initial conditions），此時前面學得 Fourier analysis 就可以派上用場了。

7.2. Wave Equations

One dimensional wave equation 是以兩端固定的弦（例如琴弦）的震動為模型所得；而 two dimensional wave equation 則來自周圍固定的薄膜（例如鼓面）的震動模型。我們將分別探討這兩種 PDE，且著重於 Fourier series 的應用。

7.2.1. One-dimensional Wave Equation. 一維的 wave equation 模型來自長度為 L 的弦的震動，在時間 t，位置 x 之處，其震動高度為 $u(x,t)$，此時 $u(x,t)$ 滿足 PDE：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。由於弦長為 L，且兩端點固定不動，所以有 boundary conditions：$u(0,t)=u(L,t)=0,\ \forall t\geq 0$。而設 initial conditions 為一開始 $t=0$ 時各位置的偏移（deflection）函數為 $f(x)$，以及移動的速度函數為 $g(x)$，即在每一點 $0\leq x\leq L$，我們有 $u(x,0)=f(x)$ 以及 $\frac{\partial u}{\partial t}=g(x)$。

首先我們用 separable variables 的方式 $u(x,t)=F(x)G(t)$ 解出符合此 PDE 可能的 $u(x,t)$。因為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F(x)G''(t);\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F''(x)G(t),$$

故由 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 可得 $F(x)G''(t)=c^2F''(x)G(t)$. 移項得 $\frac{G''(t)}{c^2G(t)}=\frac{F''(x)}{F(x)}$。由於等式兩邊是不同變數的函數，唯一的可能是它們都是常數函數 k，所以我們得到兩個 2nd-order homogeneous linear ODE with constant coefficients：

$$F''(x)-kF(x)=0;\quad G''(t)-c^2kG(t)=0.$$

注意，這兩個 ODE 的 characteristic equation 分別為 $\lambda^2-k=0$ 以及 $\lambda^2-c^2k=0$，所以它們的解會因 $k=0,k>0$ 以及 $k<0$ 而不同。首先我們利用 boundary condition，即對所有 $t>0$ 皆有 $u(0,t)=F(0)G(t)=0$ 以及 $u(L,t)=F(L)G(t)=0$，來決定 k 的範圍。由於若對所有 $t>0$，皆有 $G(t)=0$，這會得到 $u(x,t)=F(x)G(t)=0$ 這一個沒有意義的解，所以我們只考慮 $G(t)$ 不是零函數的情形，也因此由 $F(0)G(t)=0$ 以及 $F(L)G(t)=0$，我們知 $F(x)$ 必需滿足 $F(0)=F(L)=0$。

當 $k=0$ 時，characteristic equation $\lambda^2=0$，在 0 有重根，所以 $F(x)=sxe^{0x}+rx^{0x}=sx+r$ 為 ODE：$F''(x)-kF(x)=F''(x)=0$ 的 general solution。不過此時由 $F(0)=F(L)=0$，可得 $F(0)=r=0$ 以及 $F(L)=sL=0$，推得 $r=s=0$，因而得 $F(x)$ 為零函數。這也會造成 $u(x,t)=F(x)G(t)$ 為零函數這一個沒有意義的解，所以我們僅需考慮 $k\neq 0$ 的情況。

當 $k>0$ 時，我們可設 $k=\mu^2$，其中 $\mu>0$。此時由 characteristic equation $\lambda^2-k=\lambda^2-\mu^2=0$，知 $F(x)=se^{\mu x}+re^{-\mu x}$。此時由 $F(0)=s+r=0$ 以及 $F(L)=se^{\mu L}+re^{-\mu L}$，又解得 $r=s=0$，即 $u(x,t)$ 為零函數這一個沒有意義的解。所以我們也不必考慮 $k>0$ 的情形，僅需考慮 $k=-\mu^2<0$ 的情況。

當 $k=-\mu^2$，其中 $\mu>0$ 時，characteristic equation $\lambda^2-k=\lambda^2+\mu^2=0$ 的解為 $\lambda=\mu i$ 以及 $\lambda=-\mu i$（其中 $i=\sqrt{-1}$），因此解得 $F(x)=s\cos\mu x+r\sin\mu x$。此時利用 boundary conditions 解得 $F(0)=s=0$ 以及 $F(L)=r\sin\mu L=0$。當然我們不考慮 $r=0$ 的情形（否則又得到 $u(x,t)$ 為零函數），故知 $\sin\mu L=0$，亦即 $\mu=\frac{n\pi}{L}$，其中 n 為任意正整數（因假設 $\mu>0$）。因此我們解得 $k=-(\frac{n\pi}{L})^2$ 且 $F(x)=r\sin\frac{n\pi}{L}x$，其中 n 可為任意的正整數且 r 為任意實數。

由 boundary conditions 確定 k 以及 $F(x)$ 可能的形式後，接著便是要決定 $G(t)$。由於 $G(t)$ 所符合的 ODE 的 characteristic equation 為 $\lambda^2-c^2k=\lambda^2+(c\frac{n\pi}{L})^2=0$ 且其解為 $\lambda=\pm c\frac{n\pi}{L}i$，故解得 $G(t)=s^*\cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)+r^*\sin\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)$。與前面所得的 $F(x)$ 合併起來，我們得到對所有正整數 n，符合此 PDE 以及 boundary conditions 的一個解

$$u_n(x,t)=\left(b_n\cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)+c_n\sin\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)\right)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

其中 b_n,c_n 為任意實數（一般稱 $u_n(x,t)$ 為此 PDE 的 *eigenfunction*）。接下來，我們要探討的是如何由 initial conditions 來決定這些 b_n,c_n。

首先由 superposition principle 我們可設

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)+c_n\sin\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

由第一個 initial condition：$u(x,0)=f(x),\ 0\le x\le L$，代 $t=0$ 則因 $\cos 0=1,\ \sin 0=0$ 我們得 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}=f(x)$. 也因此若令 b_n 為 $f(x)$ 的 Fourier sine series 的 coefficient（注意 $f(x)$ 的定義域為 $0\le x\le L$，所以可以有週期為 $2L$ 的 odd periodic extension），則此等式自然成立。也就是由 Euler formula 可得 $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$。

再由第二個 initial condition：$\frac{\partial u}{\partial t}=g(x),\ 0\le x\le L$，將 $u(x,t)$ 對 t 偏微可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-b_nc\frac{n\pi}{L}\sin\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)+c_nc\frac{n\pi}{L}\cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

代 $t=0$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty}c_nc\frac{n\pi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}=g(x)$. 也因此若令 $c_nc\frac{n\pi}{L}$ 為 $g(x)$ 的 Fourier sine series 的 coefficient，則此等式自然成立。也就是由 Euler formula 可得 $c_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$。我們可以總結如下：

Theorem 7.2.1. 考慮 *PDE*：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，以及 *boundary conditions*：$u(0,t)=u(L,t)=0$, $\forall t\ge 0$ 和 *initial conditions*：$u(x,0)=f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=g(x)$, $0\le x\le L$。若 $f(x)$ 的 *Fourier sine* *series* 為 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ 以及 $g(x)$ 的 *Fourier sine series* 為 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \sin\frac{n\pi x}{L}$，則此 *PDE* 的解為

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\cos\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)+\frac{b_n^*L}{cn\pi}\sin\left(c\frac{n\pi}{L}t\right)\right)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Example 7.2.2 (課本 Example 12.3.1)**.** 我們看一個弦長 L，起始位置偏移（initial deflection）是三角形，即

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2k}{L}x, & \text{if } 0<x<\frac{L}{2};\\[2ex] \frac{2k}{L}(L-x), & \text{if } \frac{L}{2}<x<L.\end{cases}$$

且起始速度（initial velocity）為零，即 $g(x)=0$ 的 wave equation PDE：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的解。在前一章 Example 6.1.7（課本 Example 11.2.6），我們算過 $f(x)$ 的 Fourier sine series 為 $\frac{8k}{\pi^2}(\sin\frac{\pi}{L}x-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{L}x-\frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi}{L}x+\cdots)$. 而 $g(x)=0$，所以其 Fourier sine series 為 0（零函數是 even 也是 odd function，所以它的 odd extension 依然為零函數）。因此由 Theorem 7.2.1，可得符合這些條件的 PDE 解 $u(x,t)$ 為

$$\frac{8k}{\pi^2}(\cos\frac{c\pi t}{L}\sin\frac{\pi x}{L}-\frac{1}{3^2}\cos\frac{3c\pi t}{L}\sin\frac{3\pi x}{L}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5c\pi t}{L}\sin\frac{5\pi x}{L}-\frac{1}{7^2}\cos\frac{7c\pi t}{L}\sin\frac{7\pi x}{L}+\cdots).$$

♯

Question 7.3. 做課本習題 *12.3.5, 12.3.6.*

Question 7.4. 做課本習題 *12.3.9, 12.3.14.*（弦長皆為 π，可直接套用前一章 *Example 6.1.7*（課本 *Example 11.2.6*）的 *Fourier sine series*）。

7.2.2. Two-dimensional Wave Equation. 二維的 wave equation 模型來自薄膜的震動，在時間 t，位置 (x,y) 之處，其震動高度為 $u(x,y,t)$，此時 $u(x,y,t)$ 滿足 PDE：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$。由於膜的邊界固定不動，所以有 boundary conditions：對於任意邊界上一點 (x,y) 皆有 $u(x,y,t)=0,\ \forall t\geq 0$。而設 initial conditions 為一開始 $t=0$ 時各點 (x,y) 的偏移（deflection）函數為 $f(x,y)$，以及移動的速度函數為 $g(x,y)$，即在每一點 (x,y)，我們有 $u(x,y,0)=f(x,y)$ 以及 $\frac{\partial u}{\partial t}=g(x,y)$。Boundary condition，即薄膜邊界的形狀影響了這個 PDE 解的困難度，由於我們採用的是直角坐標系，這裡僅考慮邊界為與坐標軸平行的矩形這種情況（若邊界為圓形，一般就會用極坐標處理）。也就是說在坐標平面上，設定薄膜所在的區域 R 為 $0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq b$。

首先我們用 separable variables 的方式 $u(x,y,t)=F(x,y)G(t)$ 解出符合此 PDE 可能的 $u(x,y,t)$。因為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F(x,y)G''(t);\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F_{xx}(x,y)G(t)+F_{yy}(x,y)G(t),$$

故由 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$ 移項得 $\frac{G''(t)}{c^2G(t)}=\frac{1}{F(x,y)}(F_{xx}(x,y)+F_{yy}(x,y))$。由於等式兩邊是不同變數的函數，唯一的可能是它們都是常數函數 k，所以我們得到 $G(t)$ 需符合

2nd-order homogeneous linear ODE：$G''(t)-c^2kG(t)=0$，而 $F(x,y)$ 需符合 2nd-order homogeneous linear PDE with constant coefficients：$F_{xx}(x,y)+F_{yy}(x,y)-kF(x,y)=0$（稱為 two-dimensional Helmholtz equation）。接著和前面一維的情況一樣，為了得到 $u(x,y,t)$ 為零函數以外的情況，我們僅需考慮 k 為負實數的情況（這裡就省略不談了）。

現假設 $k=-\mu^2$，其中 $\mu>0$。和一維情況一樣，我們先決定 $F(x,y)$ 的形式，再利用 boundary conditions 來決定 μ 可能的形式。我們再用 separable variables 的方式處理 $F(x,y)$ 所需符合的 Helmholtz equation，即 PDE：$F_{xx}(x,y)+F_{yy}(x,y)+\mu^2F(x,y)=0$。也就是說令 $F(x,y)=H(x)Q(y)$，則由 $F_{xx}(x,y)=H''(x)Q(y)$ 以及 $F_{yy}(x,y)=H(x)Q''(y)$，代入 PDE 得

$$H''(x)Q(y)+H(x)Q''(y)+\mu^2H(x)Q(y)=0,$$

再移項得

$$\frac{1}{H(x)}H''(x)=\frac{-1}{Q(y)}Q''(y)-\mu^2.$$

再一次，由於 boundary conditions，我們要得到非零函數，僅需考慮等式兩邊的函數等於常數函數 $-\nu^2$。也因此我們得到 $H(x),Q(y)$ 需符合 2nd-order homogeneous linear ODE：

$$H''(x)+\nu^2H(x)=0;\quad Q''(x)+(\mu^2-\nu^2)Q(y)=0.$$

現若 $\mu^2-\nu^2\le 0$，則 boundary conditions 又會導致 $Q(y)=0$，所以我們僅需考慮 $\mu^2-\nu^2>0$ 的情況，為了方便起見，我們令 $\mu^2-\nu^2=\omega^2$。也因此解得

$$H(x)=s\cos\nu x+r\sin\nu x;\quad Q(y)=s^*\cos\omega y+r^*\sin\omega y.$$

由於區域 R 的邊界為 $x=0,x=a$ 以及 $y=0,y=b$，boundary conditions 要求在此邊界上 $u(x,y,t)=H(x)Q(y)G(t)=0$, 亦即

$$H(0)Q(y)G(t)=0, H(a)Q(y)G(t)=0, \forall t>0, 0\le y\le b;$$

$$H(x)Q(0)G(t)=0, H(x)Q(b)G(t)=0, \forall t>0, 0\le x\le a.$$

因此由 $H(x),Q(y),G(t)$ 不為零函數，得 $H(0)=s=0$, $H(a)=r\sin\nu a=0$。由於 $r\ne 0$，否則 $H(x)=0$，因此得 $\sin\nu a=0$，亦即 $\nu a=m\pi$, $m\in\mathbb{N}$。同理可得 $\omega b=n\pi$, $n\in\mathbb{N}$。也因此得到對於所有的正整數 m,n，$F_{m,n}(x,y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$ 會符合 Helmholtz equation 以及 boundary condition。

既然確定了 $\nu=\frac{m\pi}{a}$, $\omega=\frac{n\pi}{b}$, 其中 m,n 為任意的正整數，則由 $-k=\mu^2=\nu^2+\omega^2$ 我們得到 $G(t)$ 所需符合的 ODE 為

$$G''(t)+c^2\left((\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2\right)G(t)=0.$$

為了方便起見，我們令 $\lambda_{mn}=c\pi\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}$，因此對任意 $m,n\in\mathbb{N}$，可解得 $G(t)=b_{mn}\cos\lambda_{mn}t+b^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t$。也因此，由 superposition principle，我們可得一般解

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(b_{mn}\cos\lambda_{mn}t+b^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

接下來便是探討如何決定 b_{mn},b^*_{mn} 使之符合 initial conditions。

代 $t=0$，我們有

$$u(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=f(x,y).$$

這是所謂 $f(x,y)$ 的 double Fourier sine series。另外

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda_{mn}b_{mn}\sin\lambda_{mn}t+\lambda_{mn}b^*_{mn}\cos\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

所以代 $t=0$，我們有

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{mn}b^*_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=g(x,y).$$

最後我們要探討 double Fourier series 的概念，以確定如何選取 b_{mn}, b^*_{mn} 使其符合上述的 initial conditions。首先將 $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$ 寫成 $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}$。這裡 $\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}$ 這裡 m 是一個固定的正整數，所以可以看成是一個 y 的函數 $K_m(y)$ 的 Fourier sine series（注意 $0\le y\le b$ 所以可以有週期為 $2b$ 的 odd periodic extension）。如果我們知道 $K_m(y)$ 是怎樣的函數，就可以利用其 Fourier sine series 得到 b_{mn} 了。然而依假設，給定 y 值為 y_0 後，$f(x,y_0)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(y_0)\sin\frac{m\pi x}{a}$. 也就是說 $K_m(y_0)$ 應該是以 x 為變數（定義在 $0\le x\le a$）的函數 $f(x,y_0)$ 做週期為 $2a$ 的 odd periodic extension 所得 Fourier sine series 的 coefficient，即 $\frac{2}{a}\int_0^a f(x,y_0)\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx$。因為這對任意在 0, b 之間的 y_0 皆成立，所以我們可以確定，固定一整數 m 之後，函數 $K_m(y)$ 可表示為

$$K_m(y)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx.$$

而 b_{mn} 是 $K_m(y)$ 的 Fourier sine series 的 coefficient，故可得

$$\begin{aligned}b_{mn}&=\frac{2}{b}\int_0^b K_m(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy=\frac{4}{ab}\int_0^b\left(\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx\right)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy\\&=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

同理，因為 $\lambda_{mn}b^*_{mn}$ 是 $g(x,y)$ 的 double Fourier sine series 的係數，所以

$$b^*_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy.$$

Example 7.2.3 (課本 Example 12.9.2)**.** 考慮在區域 $R=\{(x,y):0\le x\le 4,0\le y\le 2\}$ 上的薄膜的震動函數 $u(x,y,t)$，滿足 two-dimensional wave equation：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=5(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$ 以及 initial conditions：初始位移為 $f(x,y)=\frac{1}{10}(4x-x^2)(2y-y^2)$ 以及初始速度為 $g(x,y)=0$。

由於初始速度為零函數，我們有 $b^*_{mn}=0$，所以 $u(x,y,t)$ 可表為

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\cos\lambda_{mn}t\sin\frac{m\pi x}{4}\sin\frac{n\pi y}{2},$$

其中 $\lambda_{mn}=\sqrt{5}\pi\sqrt{(\frac{m}{4})^2+(\frac{n}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}\pi}{4}\sqrt{m^2+4n^2}$，以及

$$\begin{aligned} b_{mn} &= \frac{4}{4\times 2}\int_0^2\int_0^4 \frac{1}{10}(4x-x^2)(2y-y^2)\sin\frac{m\pi x}{4}\sin\frac{n\pi y}{2}\,dx\,dy. \\ &= \frac{1}{20}\int_0^4 (4x-x^2)\sin\frac{m\pi x}{4}\,dx\int_0^2 (2y-y^2)\sin\frac{n\pi y}{2}\,dy. \end{aligned}$$

此積分可得，當 m 或 n 為偶數時 $b_{mn}=0$，而當 m,n 皆為奇數時 $b_{mn}=\frac{2048}{5\pi^6 m^3 n^3}$。我們列出 $u(x,y,t)$ 的前幾項供參考：

$$\frac{2048}{5\pi^6}\left(\cos\frac{5\pi t}{4}\sin\frac{\pi x}{4}\sin\frac{\pi y}{2}+\frac{1}{27}(\cos\frac{\sqrt{185}\pi t}{4}\sin\frac{\pi x}{4}\sin\frac{3\pi y}{2}+\cos\frac{\sqrt{65}\pi t}{4}\sin\frac{3\pi x}{4}\sin\frac{\pi y}{2})+\cdots\right)$$

$\sharp$

7.3. Heat Equations

除了 wave equation 外，另一個重要到 PDE 就是 heat equation。它是以描繪熱在一個均勻物體傳導為模型所得，所以也稱為 *diffusion equation*。我們將探討 one-dimensional 和 two-dimensional 這兩種情況的 PDE。同樣地，著重於 Fourier series 的應用。另外也會探討物體無限長的情形，也因此介紹 Fourier transform 在這方面的應用。

7.3.1. One-dimensional Heat Equation. 一維的 heat equation 模型來自長度為 L 筆直的均勻桿子（或電纜），在時間 t，位置 x 之處，其溫度為 $u(x,t)$，此時 $u(x,t)$ 滿足 PDE：$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。我們將分別處理兩種 boundary conditions。第一種是兩端一直保持零度的情況；而另一種兩端是隔熱的情況（也就是說熱在兩端無法傳導）。至於 initial condition 我們令一開始 $t=0$ 時在位置 x 的溫度為 $f(x)$，即在每一點 $0\leq x\leq L$，我們有 $u(x,0)=f(x)$。

大家可以看出來 heat equation 和 wave equation 很像，差在對 t 偏微的次數。另外 heat equation 只需要一個 initial condition 即可得到確定的解。我們嘗試用相同的方法處理，即用 separable variables 的方式 $u(x,t)=F(x)G(t)$ 解出符合此 PDE 可能的 $u(x,t)$。因為

$$\frac{\partial u}{\partial t}=F(x)G'(t);\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F''(x)G(t),$$

故由 $\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 可得 $F(x)G'(t)=c^2F''(x)G(t)$. 移項得 $\frac{G'(t)}{c^2G(t)}=\frac{F''(x)}{F(x)}$。同樣的，因等式兩邊是不同變數的函數，唯一的可能是它們都是常數函數 k。也就是說 $F''=kF(x)$ 以及 $G'(t)=c^2kG(t)$。我們將利用 boundary condition 決定 k 的範圍。

首先考慮 boundary conditions 為兩端一直保持零度的情況，此時 boundary conditions 為：$u(0,t)=u(L,t)=0,\ \forall t\geq 0$。此情況和 wave equation 的情況一樣，當 $k\geq 0$ 時，由 boundary conditions 可以推得 $u(x,t)=0$ 這一個沒有意義的解，所以我們只考慮 $k<0$ 的情形。我們設 $k=-\mu^2$，其中 $\mu>0$。此時關於 $F(x),G(t)$ 所得的 ODE 分別為：

$$F''(x)+\mu^2F(x)=0;\quad G'(t)+(c\mu)^2G(t)=0.$$

由 characteristic equation $\lambda^2+\mu^2=0$ 的解為 $\lambda=\mu i$ 以及 $\lambda=-\mu i$（其中 $i=\sqrt{-1}$），因此解得 $F(x)=s\cos\mu x+r\sin\mu x$。此時利用 boundary conditions 解得 $F(0)=s=0$ 以及 $F(L)=r\sin\mu L=0$。當然我們不考慮 $r=0$ 的情形，故知 $\sin\mu L=0$，亦即 $\mu=\dfrac{n\pi}{L}$，其中 n 為任意正整數（因假設 $\mu>0$）。因此我們解得 $F(x)=r\sin\dfrac{n\pi}{L}x$，其中 n 可為任意的正整數且 r 為任意實數。

接著便是要決定 $G(t)$。由於 $G(t)$ 所符合的 ODE 的 characteristic equation 為 $\lambda+(\dfrac{cn\pi}{L})^2=0$ 且其解為 $\lambda=-(\dfrac{cn\pi}{L})^2$，故解得 $G(t)=r^*e^{-(cn\pi/L)^2t}$。與前面所得的 $F(x)$ 合併起來，我們得到對所有正整數 n，符合此 PDE 以及 boundary conditions 的一個解

$$u_n(x,t)=b_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-(cn\pi/L)^2t},$$

其中 b_n 為任意實數（一般稱 $u_n(x,t)$ 為此 PDE 的 *eigenfunction*）。接下來，我們要探討的是如何由 initial conditions 來決定這些 b_n。

首先由 superposition principle 我們可設

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-(cn\pi/L)^2t}$$

由 initial condition：$u(x,0)=f(x),\ 0\le x\le L$，代 $t=0$ 則因 $e^0=1$ 我們得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}=f(x)$. 也因此若令 b_n 為 $f(x)$ 的 Fourier sine series 的 coefficient，則此等式自然成立。也就是由 Euler formula 可得 $b_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$。我們總結如下：

Theorem 7.3.1. 考慮 *PDE*：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，以及 *boundary conditions*：$u(0,t)=u(L,t)=0$, $\forall t\ge 0$ 和 *initial condition*：$u(x,0)=f(x),\ 0\le x\le L$。若 $f(x)$ 的 *Fourier sine series* 為 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$，則此 *PDE* 的解為

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-(cn\pi/L)^2t}.$$

Example 7.3.2 (課本 Example 12.6.3)**.** 對於長度為 L 且 boundary conditions 為兩端一直保持零度的情況。我們看棒子初始溫度在中間處溫度 k 為最高且溫度以直線方式下降到兩端為零度，即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{L}x, & \text{if } 0<x<\dfrac{L}{2};\\[2ex] \dfrac{2k}{L}(L-x), & \text{if } \dfrac{L}{2}<x<L\end{cases}$$

的情形的 heat equation PDE：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的解。同樣的利用前一章 Example 6.1.7 所得 $f(x)$ 的 Fourier sine series 為 $\dfrac{8k}{\pi^2}(\sin\dfrac{\pi}{L}x-\dfrac{1}{3^2}\sin\dfrac{3\pi}{L}x+\dfrac{1}{5^2}\sin\dfrac{5\pi}{L}x-\dfrac{1}{7^2}\sin\dfrac{7\pi}{L}x+\cdots)$. 由 Theorem 7.3.1，可得符合這些條件的 PDE 解 $u(x,t)$ 為

$$\frac{8k}{\pi^2}(\sin\frac{\pi x}{L}e^{-(c\pi/L)^2t}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{L}e^{-(3c\pi/L)^2t}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{L}e^{-(5c\pi/L)^2t}-\frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi x}{L}e^{-(7c\pi/L)^2t}+\cdots).$$

♯

現在考慮 boundary conditions 為兩端隔熱的情況。由於熱是往溫度降的最快的地方傳導，利用 gradient 的看法，端點隔熱的情況表示熱在端點沒有傳導，所以在端點的 gradient 為 0，由於只有 one-dimensional，此時 boundary conditions 為：$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0,\ \forall t\geq 0$。我們一樣要利用 boundary condition 決定 ODE：$F''=kF(x)$ 以及 $G'(t)=c^2kG(t)$，其 k 的範圍。當 $k=\mu^2>0$ 時，$F(x)=se^{\mu x}+re^{-\mu x}$ 且 $G(t)=\ell e^{c^2\mu^2 t}$。此時 $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\mu(se^{\mu x}-re^{-\mu x})\ell e^{c^2\mu^2 t}$，所以由 boundary conditions 得 $s-r=0$ 以及 $se^{\mu L}-re^{-\mu L}=0$，解得 $s=r=0$。也就是說此時仍得 $u(x,t)=0$ 這一個沒有意義的解。因此我們剩下考慮 $k\leq 0$ 的情形。

我們設 $k=-\mu^2$，其中 $\mu\geq 0$（因為我們沒有排除 $k=0$ 的可能）。此時關於 $F(x),G(t)$ 所得的 ODE 分別為：

$$F''(x)+\mu^2F(x)=0;\quad G'(t)+(c\mu)^2G(t)=0.$$

由 characteristic equation $\lambda^2+\mu^2=0$ 的解為 $\lambda=\mu i$ 以及 $\lambda=-\mu i$（其中 $i=\sqrt{-1}$），因此解得 $F(x)=s\cos\mu x+r\sin\mu x$。此時 $\frac{\partial u}{\partial x}=(-s\mu\sin\mu x+r\mu\cos\mu x)G(t)$，所以利用 boundary conditions，我們有 $r=0$ 以及 $\sin\mu L=0$。因此我們解得 $\mu=\frac{n\pi}{L}$，以及 $F(x)=s\cos\frac{n\pi}{L}x$，其中 n 可為任意的非負整數（因為我們沒有排除 $k=0$ 的可能）且 s 為任意實數。至於 $G(t)$ 和前面一樣仍為 $G(t)=r^*e^{-(cn\pi/L)^2t}$，故與 $F(x)$ 合併起來，我們得到對所有非負整數 n，符合此 PDE 以及 boundary conditions 的一個解

$$u_n(x,t)=a_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-(cn\pi/L)^2t},$$

其中 a_n 為任意實數。接下來，我們要探討的是如何由 initial conditions 來決定這些 a_n。

首先由 superposition principle 我們可設

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-(cn\pi/L)^2t}$$

由 initial condition：$u(x,0)=f(x),\ 0\leq x\leq L$，代 $t=0$ 則因 $e^0=1$ 我們得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}=f(x)$. 也因此若令 a_n 為 $f(x)$ 的 Fourier cosine series 的 coefficient，則此等式自然成立。也就是由 Euler formula 可得 $a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$ 以及當 $n\in\mathbb{N}$ 時 $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$。我們總結如下：

Theorem 7.3.3. *考慮 PDE：*$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，*以及 boundary conditions：*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0,\forall t\geq 0$$

和 initial condition：$u(x,0)=f(x),\ 0\leq x\leq L$。*若* $f(x)$ *的 Fourier cosine series 為* $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$，*則此 PDE 的解為*

$$u(t,x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-(cn\pi/L)^2t}.$$

Example 7.3.4 (課本 Example 12.6.5)**.** 對於長度為 L 且 boundary conditions 為兩端一直保持零度的情況。我們看棒子初始溫度在中間處溫度 k 為最高且溫度以直線方式下降到兩端為零度，即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{L}x, & \text{if } 0<x<\dfrac{L}{2};\\[2ex] \dfrac{2k}{L}(L-x), & \text{if } \dfrac{L}{2}<x<L\end{cases}$$

的情形的 heat equation PDE：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的解。同樣的利用前一章 Example 6.1.7 所得 $f(x)$ 的 Fourier cosine series 為 $\dfrac{k}{2}-\dfrac{16k}{\pi^2}(\dfrac{1}{2^2}\cos\dfrac{2\pi x}{L}+\dfrac{1}{6^2}\cos\dfrac{6\pi x}{L}+\cdots)$. 由 Theorem 7.3.3，可得符合這些條件的 PDE 解 $u(x,t)$ 為

$$\frac{k}{2}-\frac{16k}{\pi^2}(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{L}e^{-(2c\pi/L)^2t}+\frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{L}e^{-(6c\pi/L)^2t}+\cdots).$$

$\sharp$

Question 7.5. 做課本習題 *12.6.5, 12.6.13, 12.6.14*（c 全部取 1）。

Question 7.6. 做課本習題 *12.6.12, 12.6.15*（可直接套用 *Question 6.8 (*課本習題 *11.2.28)* 的結果，別忘了 *Fourier series* 線性的性質）。

7.3.2. Two-dimensional Heat Equation. 二維的 heat equation 模型來自在一個平面上的模板，在時間 t，位置 (x,y) 之處，其溫度為 $u(x,y,t)$，此時 $u(x,y,t)$ 滿足 PDE：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=c^2(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2})$。二維的情況，區域的範圍影響求解的複雜度。這裡僅考慮邊界為與坐標軸平行的矩形這種情況，也就是說在坐標平面上，設定模板所在的區域 R 為 $0\le x\le a$, $0\le y\le b$。另外為了簡單起見，我們僅討論“穩定”（steady）的情況，也就是溫度不再隨時間而改變，亦即 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$。

在這種 steady 的情況，u 只剩下兩個變數（因為已沒有變數 t）所以我們用 $u(x,y)$ 來表示溫度。此時 heat equation 的 PDE 成為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

稱為 Laplace's equation。至於 boundary conditions，我們考慮所謂的 Dirichlet problem，也就是邊界上的溫度是給定的函數。這裡我們假設溫度在矩形頂邊上（即 $y=b$）的溫度為 $u(x,b)=f(x),\ 0\le x\le a$；而在其他邊溫度為 0，即 $u(x,0)=0,\ 0\le x\le a$ 以及 $u(0,y)=u(a,y)=0,\ 0\le y\le b$。因為是 steady 的情況，與時間無關，所以沒有 initial condition。

我們依然用 separable variables 的方式 $u(x,y)=F(x)G(y)$ 解出符合此 PDE 可能的 $u(x,y)$。因為

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F''(x)G(y);\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F(x)G''(y),$$

故由 Laplace's equation 可得 $\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)}$. 因此得到 ODE：$F'' - kF(x) = 0$ 以及 $G''(y) + kG(y) = 0$。我們同樣利用 boundary conditions 決定 k 的範圍。在此假設之下 boundary condition 為：

$$F(x)G(b) = f(x), F(x)G(0) = 0, 0 \leq x \leq a; \quad F(0)G(y) = F(a)G(y) = 0, 0 \leq y \leq b.$$

在排除 $u(x,y)$ 為零函數的可能之下，由這些條件得 $F(0) = F(a) = 0$ 以及 $G(0) = 0$。和前面情況一樣，由 $F(0) = F(a) = 0$ 可推得 $k = -(\frac{n\pi}{a})^2$，其中 n 為任意正整數，且在此 k 之下得到 $F(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}$ 是一解。而對這個 k，由於 $G(y)$ 所符合的 ODE 的 characteristic equation 的解為 $\lambda = \pm\frac{n\pi}{a}$，因此可得 general solution 為 $G(y) = se^{n\pi y/a} + re^{-n\pi y/a}$。此時代入 boundary condition $G(0) = 0$，得 $s + r = 0$，因此 $G(y) = e^{n\pi y/a} - e^{-n\pi y/a} = \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$ 是一解。所以由 superposition principle 可得 $u(x,y)$ 可表為

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right), a_n^* \in \mathbb{R}.$$

最後，我們用僅剩的 boundary condition $u(x,b) = f(x)$ 來決定 a_n^*。也就是說

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^* \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)) \sin\frac{n\pi x}{a} = f(x),$$

因此 $a_n^* \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$ 必需是定義在 $0 \leq x \leq a$ 的函數 $f(x)$ 的 Fourier sine series 的係數。所以求得

$$a_n^* = \frac{2}{a\sinh(n\pi b/a)} \int_0^a f(x) \sin\frac{n\pi x}{a}\, dx.$$