

Advanced Linear Algebra (I) Exercise (Week 1)

February 21, 2025

1. 請閱讀講義 Chapter 1, Section 1.6。並回答 Question 1.24, 1.27, 1.28。
2. 考慮 vector spaces V, W ，其中 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 為 V 的一組 basis 且 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 為 W 的一組 basis。考慮以下 $V \oplus W$ 的元素：

$$\mathbf{u}_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1), \mathbf{u}_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2), \mathbf{u}_3 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_3), \mathbf{u}_4 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1), \mathbf{u}_5 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2), \mathbf{u}_6 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3)$$

對於任意 $V \oplus W$ 的元素 (\mathbf{v}, \mathbf{w}) ，令 $\mathbf{v} = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2$ ， $\mathbf{w} = s_1\mathbf{w}_1 + s_2\mathbf{w}_2 + s_3\mathbf{w}_3$ 。我們希望找到 c_1, \dots, c_6 滿足 $\sum_{i=1}^6 c_i \mathbf{u}_i = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ 。

- (a) 請寫下 c_1, \dots, c_6 所需滿足的聯立方程組及其係數矩陣 A 。
 - (b) 請求出矩陣 A 的 rank，依此並說明是否 $\text{Span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_6) = V \oplus W$ 。
3. 獨立完成 Proposition 1.6.2 的證明。
 4. 假設 W 為 V 的 subspace 並考慮 quotient space V/W 。假設 \tilde{U} 為 V/W 的 subspace 並令 $U = \{\mathbf{u} \in V \mid \bar{\mathbf{u}} \in \tilde{U}\}$ 。
 - (a) 證明 U 是 V 的 subspace 且 $W \subseteq U$ 。
 - (b) 證明 $U/W = \tilde{U}$ 。