

Advanced Linear Algebra (I) Exercise (Week 2)

February 21, 2025

1. 請閱讀講義 Chapter 2, Section 2.3。並回答 Question 2.14, 2.13。
2. 假設 V_1, V_2 皆為 vector spaces 且 U_1, U_2 分別為 V_1, V_2 的 subspace.
 - (a) 證明 $U_1 \oplus U_2$ 是 $V_1 \oplus V_2$ 的 subspace.
 - (b) 證明 $(V_1 \oplus V_2)/(U_1 \oplus U_2) \simeq (V_1/U_1) \oplus (V_2/U_2)$ (請先找到自然的定義域和對應域再利用 quotient 處理)。
3. 考慮以下矩陣:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) 請分別求出它們的 characteristic polynomial.
- (b) 若已知一個矩陣的 minimal polynomial 會整除其 characteristic polynomial，請依此性質求出各矩陣的 minimal polynomial。