

Advanced Linear Algebra (I) Exercise (Week 3)

March 07, 2025

1. 請閱讀講義 Chapter 3, Section 3.3。並回答 Question 3.5, 3.7, 3.9。
2. 令 $\mathcal{L}(V)$ 為所有 V 到 V 的 linear operator。定義 $\mathcal{L}(V)$ 上的加法為函數的加法且乘法為函數的合成。
 - (a) 證明在此加法與乘法之下， $\mathcal{L}(V)$ 是一個 ring.
 - (b) 給定 V 的一組 ordered basis β ，令 $\Phi: \mathcal{L}(V) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ 定義為 $\Phi(T) = [T]_\beta$, $\forall T \in \mathcal{L}(V)$. 證明 Φ 為 ring isomorphism.
3. 假設 T 為 linear operator 且 $p(x)$ 為 irreducible polynomial in $\mathbb{F}[x]$ 。已知 $p(T)$ 不是 one-to-one. 證明 $p(x) \mid \chi_T(x)$ 且 $p(x) \mid \mu_T(x)$.
4. 假設 $T: V \rightarrow V$ 為 linear operator 且 $p(x), q(x) \in \mathbb{F}[x]$ 為互質，亦即存在 $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使得 $a(x) \cdot p(x) + b(x) \cdot q(x) = 1$.
 - (a) Prove that $\text{Im}(p(T)) + \text{Im}(q(T)) = V$.
 - (b) Prove that $\text{Ker}(p(T)) \cap \text{Ker}(q(T)) = \{\mathbf{0}\}$.
 - (c) Suppose that $\mu_T(x) = p(x)q(x)$. Prove that $\text{Ker}(p(T)) = \text{Im}(q(T))$.