**Advanced Linear Algebra (I) Exercise (Week 4)**

March 14, 2025

1. 請閱讀講義 Chapter 3, Section 3.5。並自己完成 Example 3.5.10。

2. 利用之前習題所得以下矩陣的 minimal polynomial，對每個矩陣找到可逆矩陣 $P$ 使得 $P^{-1} \cdot A \cdot P$ 為 block diagonal matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 考慮以下 $P_2(\mathbb{R})$ 上的 linear operators：

$$T_1(ax^2+bx+c) = (-3a+b-c)x^2 + (-7a+5b-c)x + (-6a+6b-2c),$$

$$T_2(ax^2+bx+c) = (a-3b+3c)x^2 + (3a-5b+3c)x + (6a-6b+4c).$$

說明哪一個可對角化，並找到有序基底 $\beta$ 使其表現矩陣為對角矩陣。

4. 假設 $T \in \mathscr{L}(V)$ 且 $\chi_T(x) = p_1(x)^{c_1} \cdots p_k(x)^{c_k}, \mu_T(x) = p_1(x)^{m_1} \cdots p_k(x)^{m_k}$ 其中 $c_i, m_i \in \mathbb{N}$ 且 $p_1(x), \ldots, p_k(x)$ 為相異的 monic irreducible polynomials.
   (a) 說明 $\dim(\mathrm{Ker}(p_i(T)^{\circ m_i})) = c_i \deg(p_i(x)), \forall i = 1, \ldots, k.$
   (b) 證明 $\mathrm{Ker}(p_1(T)^{\circ m_1}) = \mathrm{Im}(p_2(T)^{\circ m_2} \circ \cdots \circ p_k(T)^{\circ m_k}).$

5. 假設 $T \in \mathscr{L}(V)$ 且 $V = U \oplus W$, 其中 $U, W$ 皆為 $T$-invariant. 考慮函數 $\pi_U : V \to V$ 定義為 $\pi_U(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$, 若 $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ 其中 $\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$.
   (a) 說明 $\pi_U$ 為 linear transformation 並求 $\mathrm{Im}(\pi_U), \mathrm{Ker}(\pi_U)$.
   (b) 證明 $\pi_U \circ T = T \circ \pi_U$.
   (c) 假設 $\mu_T(x) = f(x)g(x)$ 其中 $f(x), g(x) \in F[x]$ 互質. 若令 $\mathrm{Ker}(f(T)) = U$ 且 $\mathrm{Ker}(g(T)) = W$. 證明存在 $h(x) \in F[x]$ 使得 $\pi_U = h(T)$.