Advanced Linear Algebra (I) Exercise (Week 5)
March 21, 2025

1. 請閱讀講義 Chapter 4, Section 4.2。回答 Question 4.8, 4.9 並自己完成 Example 4.2.7。

2. 令 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，其中 $0 < \theta < 2\pi$。

   (a) 將 A 視為 over $\mathbb{C}$ 的矩陣。試求 A 的 eigenvalues，並將 A 化為 diagonal form（即找到複係數矩陣 P 使得 $P^{-1}AP$ 為對角矩陣）。

   (b) 將 A 視為 over $\mathbb{R}$ 的矩陣。試以論證方式（例如反證法）說明 A 無法利用實係數矩陣化成 triangular form.

3. 考慮 Linear operator $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，其中 T 的特徵多項式 $\chi_T(x)$ 在實數可以完全分解。

   (a) 設 $\chi_T(x) = (x-\lambda)^3$，試依 λ 所有可能的幾何重根數，回答最小多項式 $\mu_T(x)$ 可能的形式，並寫出其對應的 triangular form 可能的形式。

   (b) 設 $\chi_T(x) = (x-\lambda)^2(x-\gamma)$，其中 $\lambda \neq \gamma$。試依 T 的 triangular form 可能的形式寫下 $\mu_T(x) = (x-\lambda)^2(x-\gamma)$ 的充要條件。

   (c) 設 T_1, T_2 皆為 $\mathbb{R}^3$ 上的 linear operator 且皆可化為 triangular form。試說明可否由它們的 triangular forms 來判定 T_1, T_2 是否為 similar。

4. 以下問題主要為練習對 linear transformation 的 image 和 kernel 相關的論證。鼓勵大家探討，不會列入評量。

   Let $T_1 : V \to W$ and $T_2 : W \to U$ be linear transformations. Consider the composition $T_2 \circ T_1 : V \to U$.

   (a) Show that $\mathrm{Ker}(T_2 \circ T_1) = T_1^{-1}(\mathrm{Ker}(T_2))$.

   (b) Prove that $T_2 \circ T_1$ is one-to-one if and only if T_1 is one-to-one and
   $$\mathrm{Ker}(T_2) \cap \mathrm{Im}(T_1) = \{\mathbf{O}_W\}.$$

   (c) Show that $\mathrm{Im}(T_2 \circ T_1) = T_2(\mathrm{Im}(T_1))$.

   (d) Prove that $T_2 \circ T_1$ is onto if and only if T_2 is onto and
   $$\mathrm{Ker}(T_2) + \mathrm{Im}(T_1) = W.$$

   (e) Suppose that W is finite dimensional. Prove
   $$\dim(\mathrm{Im}(T_1)) + \dim(\mathrm{Im}(T_2)) - \dim(W) \le \dim(\mathrm{Im}(T_2 \circ T_1)) \le \min\{\dim(\mathrm{Im}(T_1)), \dim(\mathrm{Im}(T_2))\}.$$

   (Hint: Consider the restriction map $T_2|_{\mathrm{Im}(T_1)} : \mathrm{Im}(T_1) \to U$ for the first inequality.)