

Advanced Linear Algebra (I) Exercise (Week 6)

March 28, 2025

1. 請閱讀講義 Chapter 4, Section 4.3。回答 Question 4.10, 4.13。

2. 令 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。

(a) 試將 A 寫成 $D+N$ 的形式，其中 D 為 diagonal matrix、 N 為 nilpotent 且 $DN=ND$ 。

(b) 說明 N 的 index 且利用二項式定理求出 A^7 。

3. 考慮方陣 A, B 其 characteristic polynomials 如下。試寫出 A, B 所有可能的 minimal polynomials 並寫出其對應的 Jordan forms.

(a) $\chi_A(x) = (x-\lambda)^5$.

(b) $\chi_B(x) = (x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)^3$, where $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

4. 試寫下以下矩陣的 Jordan form：

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. 令 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ 。給定非 0 實數 r, s, t ，試找到一個可逆矩陣 P ，使得

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ r & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & s & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & t & \lambda \end{pmatrix}.$$