Advanced Linear Algebra (I) Exercise (Week 8)

April 11, 2025

1. 將期中考 4、5 兩題寫得更完整。

2. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. 請找出可逆矩陣 P 使得 $P^{-1}AP$ 為 Week 6 習題 4 所找出的 Jordan form。

3. 已知方陣 A, B 的 characteristic polynomial 皆為 $(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)^3$ 其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 證明 A and B are similar 若且唯若 minimal polynomial $\mu_A(x) = \mu_B(x)$.

4. 已知以下兩個矩陣皆為 nilpotent：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

說明 A and B are not similar.