

## Advanced Linear Algebra (I) Exercise (Week 9)

April 18, 2025

1. 請先閱讀 (預習) 講義 Sec. 4.4。

2. 令  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- (a) 請找出可逆矩陣  $P$  使得  $P^{-1}AP$  為 Jordan form, 且第一個 block 是一個  $2 \times 2$  elementary Jordan matrix associate with 2。
- (b) 若將  $P$  的 1st column 加上一個 eigenvalue 為 2 的 eigenvector 且其餘 column 不變所成的矩陣為  $Q$ , 試檢查  $Q^{-1}AQ = P^{-1}AP$  並說明原因。

3. 考慮以下矩陣

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) 哪些可利用 characteristic polynomial 知道不是相似。
- (b) 哪些可利用 minimal polynomial 知道不是相似。
- (c) 試找到可逆矩陣  $P$  使得  $P^{-1}AP = C$ 。