

Advanced Linear Algebra (I) Exercise (Week 10)

April 25, 2025

1. 考慮 linear operator $T : V \rightarrow V$ 。考慮 $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ ，假設 $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ 的 T -annihilators $\mu_{\mathbf{u}}(x)$, $\mu_{\mathbf{w}}(x)$ 為互質，令 $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ 。

(a) 證明 $C_{\mathbf{u}} \cap C_{\mathbf{w}} = \{\mathbf{0}_V\}$ 。

(b) 證明 $\mu_{\mathbf{v}}(x) = \mu_{\mathbf{u}}(x)\mu_{\mathbf{w}}(x)$ 。

(c) 說明 $C_{\mathbf{v}} = C_{\mathbf{u}} \oplus C_{\mathbf{w}}$ 。

2. 給定 linear operator $T : V \rightarrow V$ 。利用 cyclic decomposition Theorem (Theorem 4.4.10) 說明 V 存在一個 cyclic decomposition

$$V = C_{\mathbf{v}_1} \oplus C_{\mathbf{v}_2} \oplus \cdots \oplus C_{\mathbf{v}_k}$$

其中 $\mu_{\mathbf{v}_{i+1}}(x) \mid \mu_{\mathbf{v}_i}(x), \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$ 。

(定義： $(\mu_{\mathbf{v}_1}(x), \mu_{\mathbf{v}_2}(x), \dots, \mu_{\mathbf{v}_k}(x))$ 稱為 *invariant factors* of T 。)

3. 考慮 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -6 & 4 & 3 & -8 & -4 & -2 & 1 \\ -1 & 8 & -3 & -1 & 5 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，已知

$$\chi_A(x) = (x^2 - x - 1)^3(x+1)^2, \mu_A(x) = (x^2 - x - 1)^2(x+1)^2 = x^6 - 4x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

(注意考慮 over $\mathbb{Q}$, $x^2 - x - 1$ 是 irreducible)

(a) 試寫下 over $\mathbb{Q}$ 之下 A 的 elementary divisor 及其對應的 rational form。

(b) 試寫下 over $\mathbb{Q}$ 之下 A 的 invariant factor 及其對應的 rational form。

(c) 試寫下 over $\mathbb{R}$ 之下 A 的 elementary divisor 及其對應的 rational form。

(d) 試寫下 over $\mathbb{R}$ 之下 A 的 invariant factor 及其對應的 rational form。