Advanced Linear Algebra (I) Exercise (Week 13)

May 16, 2025

1. 閱讀講義 Sec. 5.2。回答 Question 5.10, 5.12.

2. 考慮 $V=\mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_1=(1,0)$, $\mathbf{v}_2=(1,1)$. 令 V^* 為 V 的 dual space 且 $\mathbf{v}_1^*,\mathbf{v}_2^*$，為以 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 所得的 dual basis. 令 $(V^*)^*$ 為 V^* 的 dual space 且 $(\mathbf{v}_1^*)^*,(\mathbf{v}_2^*)^*$，為以 $\mathbf{v}_1^*,\mathbf{v}_2^*$ 所得的 dual basis.

   (a) 試分別寫下 linear functions $\mathbf{v}_1^*(x,y)$, $\mathbf{v}_2^*(x,y)$。

   (b) 若 $f\in V^*$ 定義為 $f(x,y)=ax+by$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$。試將 f 寫成 v_1^*,v_2^* 的線性組合。

   (c) 承 (b)，試寫下 $(\mathbf{v}_1^*)^*(f)$ 和 $(\mathbf{v}_2^*)^*(f)$ 之值，並比較與 $f(\mathbf{v}_1)$, $f(\mathbf{v}_2)$ 的關係。

   (d) 對任意 $\mathbf{v}\in V$ 定義 $\hat{\mathbf{v}}(g)=g(\mathbf{v}), \forall g\in V^*$。若 $\mathbf{v}=(-1,2)$，試求 $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_1^*)$, $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_1^*)$。

   (e) 考慮 $\tau: V\to(V^*)^*$ 為 canonical map，即對任意 $\mathbf{v}\in V$，$\tau(\mathbf{v})=\hat{\mathbf{v}}\in(V^*)^*$。又考慮 non-canonical map $\lambda: V\to(V^*)^*$，其定義為 $\lambda(\mathbf{v}_1)=(\mathbf{v}_1^*)^*$, $\lambda(\mathbf{v}_2)=(\mathbf{v}_2^*)^*$ (即若 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ 則 $\lambda(\mathbf{v})=c_1(\mathbf{v}_1^*)^*+c_2(\mathbf{v}_2^*)^*$)。試說明 τ,λ 的關係。

3. 設 V 為 vector space 且 $\beta=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 為 V 的一組 ordered basis。考慮 dual space V^* 且令 $\beta^*=(\mathbf{v}_1^*,\ldots,\mathbf{v}_n^*)$ 為以 β 所得的 dual ordered basis。若 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n\in V$，定義 $\mathbf{v}^*=c_1\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*\in V^*$。考慮 linear transformation $T:V\to W$，以及 W 的 ordered basis $\gamma=(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m)$ 且令 $\gamma^*=(\mathbf{w}_1^*,\ldots,\mathbf{w}_m^*)$ 為以 γ 所得 W^* 的 ordered dual basis。同樣的，對於 $\mathbf{w}=d_1\mathbf{w}_1+\cdots+d_m\mathbf{w}_m\in W$，令 $\mathbf{w}^*=d_1\mathbf{w}_1^*+\cdots+d_m\mathbf{w}_m^*$。

   (a) 考慮函數 $T': V^*\to W^*$ 定義為 $T'(\mathbf{v}^*)=T(\mathbf{v})^*, \forall\mathbf{v}^*\in V^*$. 證明 T' 是 linear transformation.

   (b) 試比較表現矩陣 ${}_{\gamma}[T]_{\beta}$ 以及 ${}_{\gamma^*}[T']_{\beta^*}$ 的關係.