

Advanced Linear Algebra (I) Exercise (Week 14)

May 23, 2025

- 閱讀講義 Sec. 5.3。回答 Question 5.13, 5.15.
- 令 $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}^3$ 。考慮 linear transformation $T: V \rightarrow W$ ，其中 T 使用標準基底所得的表現矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。本題中，請使用標準基底表現矩陣來表示 dual space 的元素。例如若 $f \in W^*$ ，定義為 $f(x, y, z) = 2x - 3y + z$ 則以矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 表示 f 。又 V^* , W^* 的基底都用標準基底的 dual basis，即所謂 standard dual basis。
 - 請利用矩陣寫下 W^* 的 standard dual basis。
 - 請說明若用矩陣表示 dual space 的元素，則 T^t 的定義域、對應域分別為幾階的矩陣。
 - 試用矩陣表示 $T^t(f)$ ，其中 $f(x, y, z) = 2x - 3y + z$ 。
 - 試依定義寫下 T^t 利用 standard dual basis 所得表現矩陣。
 - 試利用 (d) 所得矩陣寫下 $\ker(T^t)$ 和 $\text{Im}(T^t)$ 的 basis。
 - 試寫下 $\ker(T)$ 和 $\text{Im}(T)$ 的 basis，並依此寫下 $\ker(T^t)^\circ$ 和 $\text{Im}(T^t)^\circ$ 的 basis。
- 設 V, W 為 vector space 且 $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, $\gamma = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ 分別為 V, W 的 ordered basis。考慮 dual space V^*, W^* 且分別令 $\beta^* = (\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_n^*)$, $\gamma^* = (\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_m^*)$ 為以 β, γ 所得的 dual ordered basis。考慮 linear transformation $T: V \rightarrow W$ 以及其 transpose $T^t: W^* \rightarrow V^*$ 。
 - 說明 T 為映成會和 T^t 為一對一或映成哪一個是等價的？反之， T 為一對一會和 T^t 為一對一或映成哪一個是等價的？
 - 試比較表現矩陣 ${}_\gamma[T]_\beta$ 以及 ${}_{\beta^*}[T^t]_{\gamma^*}$ 的關係。
 - 利用 $\dim(\text{Im}(T))$, $\dim(\text{Im}(T^t))$ 的關係，說明對任意矩陣 A 和 A^t 有相同的 rank。