

Advanced Linear Algebra (I) Exercise (Week 15)

May 29, 2025

1. 我們知道同樣的 linear transformation $T : V \rightarrow W$ ，如果定義域 V 或對應域 W 使用不同的 inner product 會得到不同的 adjoint $T^* : W \rightarrow V$ 。所以一個 linear operator 是否為 normal 或 self-adjoint 無法由 linear operator 本身得知。請詳細閱讀並理解講義 Example 5.3.11 (p.124) 以及 Example 5.6.16 (p.143)。
2. 考慮 linear operator $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ 定義為 $T(x, y) = (\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)$, $\forall x, y \in \mathbb{C}$ (此映射若限制在 $\mathbb{R}^2$ 上為旋轉映射)。考慮 $\mathbb{C}^2$ 使用 standard inner product (此時 $(1, 0), (0, 1)$ 仍為 orthonormal basis)。
 - (a) 請寫下 $T^*(x, y)$ 為何？並說明說明 T 是否為 self-adjoint (即滿足 $T^* = T$) 以及 T 是否為 normal (即滿足 $T^* \circ T = T \circ T^*$)。
 - (b) 已知若 T 為 normal 則必可找到互相垂直的 eigenvectors。試找到一組互相垂直的 eigenvectors。
 - (c) 已知若 T 為 self-adjoint 則其 eigenvalue 必為實數。請說明為何在 $\mathbb{C}^2$ 不可能找到 inner product 使得 $T^* = T$ 。