

接下來我們說明若 $\dim(V) = n$ 且 $T: V \rightarrow V$ 為 nilpotent operator of index m , 如何將其化為 triangular form. 首先選取 $\text{Im}(T^{\circ m-1})$ 的 ordered basis $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1})$, 注意此時我們有 $T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T^{\circ m}) = \{\mathbf{O}_V\}$, 故

$$T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{O}_V, \forall i = 1, \dots, k_1.$$

接著加入 $\{\mathbf{v}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}\}$ 使得 $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2})$ 為 $\text{Im}(T^{\circ m-2})$ 的 ordered basis. 此時我們有

$$T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T^{\circ m-1}) = \text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}\}), \forall i = k_1 + 1, \dots, k_2,$$

而且利用 ordered basis $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2})$ 所得 $T|_{\text{Im}(T^{\circ m-2})}$ 的 representative matrix 為

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O}_{k_1, k_1} & * \\ \mathbf{O}_{k_2-k_1, k_1} & \mathbf{O}_{k_2-k_1, k_2-k_1} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{O}_{i,j}$ 表示為 $i \times j$ 階的零矩陣, 而右上角的 $*$ 為一個 $k_1 \times k_2 - k_1$ 階的非零矩陣. 接下來加入 $\{\mathbf{v}_{k_2+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_3}\}$ 使得 $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}, \dots, \mathbf{v}_{k_3})$ 為 $\text{Im}(T^{\circ m-3})$ 的 ordered basis. 此時我們有

$$T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T^{\circ m-2}) = \text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}\}), \forall i = k_2 + 1, \dots, k_3,$$

而且利用 ordered basis $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}, \dots, \mathbf{v}_{k_3})$ 所得 $T|_{\text{Im}(T^{\circ m-3})}$ 的 representative matrix 為

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O}_{k_1, k_1} & * & * \\ \mathbf{O}_{k_2-k_1, k_1} & \mathbf{O}_{k_2-k_1, k_2-k_1} & * \\ \mathbf{O}_{k_3-k_2, k_1} & \mathbf{O}_{k_3-k_2, k_2-k_1} & \mathbf{O}_{k_3-k_2, k_3-k_2} \end{pmatrix}.$$

這樣一直下去我們可得到 $\text{Im}(T)$ 的 ordered basis $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}})$, 其中對於 $j = 1, \dots, m-1$, 皆有 $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_j})$ 為 $\text{Im}(T^{\circ m-j})$ 的 ordered basis 且

$$T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T^{\circ m-(j-1)}) = \text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{j-1}}\}), \forall i = k_{j-1} + 1, \dots, k_j.$$

最後加入 $\{\mathbf{v}_{k_{m-1}+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 使得 $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}}, \dots, \mathbf{v}_n)$ 為 V 的 ordered basis, 此時

$$T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T) = \text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}}\}), \forall i = k_{m-1} + 1, \dots, k_n,$$

而且利用 ordered basis $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}}, \dots, \mathbf{v}_n)$ 所得 T 的 representative matrix 為

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

這一個矩陣是對角線皆為 0 的 upper triangular matrix (上三角矩陣), 所以我們有以下的結果.

Proposition 4.2.2. 假設 V 為 finite dimensional F -space 且 $T: V \rightarrow V$ 為 linear operator. 則 T 為 nilpotent 若且唯若存在 V 的 ordered basis β 使得 $[T]_\beta$ 為 upper triangular matrix 且 $[T]_\beta$ 的對角線皆為 0.

Proof. 由前面的討論我們知: 若 T 為 nilpotent, 則存在 V 的 ordered basis β 使得 $[T]_\beta$ 為 upper triangular matrix 且其對角線皆為 0. 反之, 若 $[T]_\beta$ 為 upper triangular matrix 且其對角線皆為 0, 我們知 $\chi_T(x) = \chi_{[T]_\beta}(x) = x^n$ (其中 $n = \dim(V)$), 故知 $T^{\circ n} = \mathbf{O}$, 得證 T 為 nilpotent. $\square$

Question 4.7. 若 V 為 *finite dimensional F -space* 且 $T: V \rightarrow V$ 為 *nilpotent operator of index m* , 則 $\chi_T(x)$ 為何? 又 $\mu_T(x)$ 為何?

回顧一下, 對於 linear operator $T: V \rightarrow V$, 要找到 $\text{Im}(T)$, 我們可以利用 V 的 ordered basis β , 先得到 representative matrix $[T]_\beta$. 再求 $[T]_\beta$ 的 column space $C([T]_\beta)$ (我們用 $C(A)$ 表示矩陣 A 的 column space). 接著將 column space 的元素用 $\tau_\beta^{\circ-1}$ 還原成 V 的元素, 就得到 $\text{Im}(T)$ 的元素了. 我們看以下化為 upper triangular matrix 的例子.

Example 4.2.3. 考慮 linear operator $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, 定義為 $T(ax^2 + bx + c) = (c - a)x^2 + cx + (c - a)$. 若考慮 $P_2(\mathbb{R})$ 的 ordered basis $\beta = (x^2, x, 1)$, 我們有 $[T]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 得

$\chi_T(x) = x^3$. 又 $[T]_\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 知 $\mu_T(x) = x^3$, 即 T 為 nilpotent of index 3. 因 $[T]_\beta^2$ 的 column space 為 $\text{Span}(\{(0, 1, 0)^t\})$, 我們得 $\text{Im}(T^{\circ 2}) = \text{Span}(\{x\})$. 同理由 $[T]_\beta$ 的 column space, 可得 $\text{Im}(T) = \text{Span}(\{x, x^2 + 1\})$. 最後因 $x^2 \notin \text{Im}(T)$, 我們可以考慮 $P_2(\mathbb{R})$ 的 ordered basis $\beta' = (x, x^2 + 1, x^2)$. 因

$$T(x) = 0, T(x^2 + 1) = 1x + 0(x^2 + 1) + 0x^2, T(x^2) = 0x + (-1)(x^2 + 1) + 0x^2$$

得 $[T]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 這一個 diagonal 皆為 0 的 upper triangular matrix.

現在我們回到 T 的 minimal polynomial 為 $\mu_T(x) = (x - \lambda)^m$ 的情形, 此時 $T - \lambda \text{id}$ 為 nilpotent 所以由 Proposition 4.2.2 知存在 ordered basis β 使得 $[T - \lambda \text{id}]_\beta = U$ 為一個 diagonal 皆為 0 的 upper triangular matrix

$$U = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

然而若 $\dim(V) = n$, 因 $[T - \lambda \text{id}]_\beta = [T]_\beta - \lambda I_n$, 故得 $[T]_\beta = \lambda I_n + U$, 為一個 diagonal 皆為 λ 的 upper triangular matrix

$$\lambda I_n + U = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ & \ddots & * \\ \mathbf{0} & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Theorem 4.2.4. 假設 V 為 *finite dimensional F -space*. 若 $T: V \rightarrow V$ 為 linear operator 其 characteristic polynomial 為

$$\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k},$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 為 F 中相異的元素, 則存在 V 的 ordered basis β 使得

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_k \end{pmatrix},$$

其中每個 A_i 為 $c_i \times c_i$ 階的 *upper triangular matrix*

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & * & * \\ & \ddots & * \\ \mathbf{O} & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Proof. 由 Theorem 3.3.9 知存在 $m_i \leq c_i$ 使得 $\mu_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$, 故由 Primary Decomposition Theorem, 我們知 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, 其中 $V_i = \text{Ker}((T - \lambda_i \text{id})^{m_i})$ 且 $\mu_{T|_{V_i}}(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$. 得 $T|_{V_i} - \lambda_i \text{id}|_{V_i}$ 為 nilpotent, 故利用 Proposition 4.2.2, 我們知存在 β_i 為 V_i 的 ordered basis, 使得 $[T|_{V_i}]_{\beta_i}$ 為 A_i 這樣的 $c_i \times c_i$ 階的 upper triangular matrix. 故將 $\beta_1, \dots, \beta_k$ 依序排列形成 V 的 ordered basis β , 可得 $[T]_{\beta}$ 為所要的 triangular matrix. $\square$

Theorem 4.2.4 告訴我們當 T 的 characteristic polynomial 可完全分解成 $F[x]$ 中的一次多項式乘積, 雖然 T 可能不能化成 diagonal form 不過一定可以化成 triangular form.

接著我們來看 linear operator 相對應到 $n \times n$ matrix 的結論.

Theorem 4.2.5. 假設 $A \in M_n(F)$ 且其 *characteristic polynomial* 和 *minimal polynomial* 分別為

$$\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}, \mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 為 F 中相異的元素. 則存在 invertible matrix P 使得

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & A_k \end{pmatrix},$$

其中每個 A_i 為 $c_i \times c_i$ 階的 *upper triangular matrix*

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & * & * \\ & \ddots & * \\ \mathbf{O} & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

假設 $A \in M_n(F)$ 且 $\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}$, $\mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$. 我們說明如何找到 invertible matrix M 使得 $M^{-1} \cdot A \cdot M$ 為 upper triangular matrix. 首先我們利用 Chapter 3 primary decomposition 的方法找到 invertible matrix P 使得 $P^{-1} \cdot A \cdot P$ 為 block diagonal matrix

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & A_k \end{pmatrix},$$

接著考慮每一個 $c_i \times c_i$ matrix A_i . 因為 $\mu_{A_i}(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$, $A_i - \lambda_i I_{c_i}$ 是 nilpotent of index m_i , 我們可以利用 Proposition 4.2.2 的方法首先找 $(A_i - \lambda_i I_{c_i})^{m_i-1}$ 的 column space 的一組 basis (此即相對於 Proposition 4.2.2 中 $\text{Im}(T^{m-1})$ 的 basis), 然後擴大成 $(A_i - \lambda_i I_{c_i})^{m_i-2}$ 的 column space 的一組 basis, 這樣一直下去直到擴大成 F^{c_i} 的一組 basis. 若令這組 basis 以 column by column 依序組成的 $c_i \times c_i$ 的 matrix 為 Q_i , 則我們有 $Q_i^{-1} \cdot A_i \cdot Q_i$ 為 upper

triangular matrix. 最後將這些 Q_i 在 diagonal 的位置依序放入, 組成 $n \times n$ 的 invertible matrix

$$\begin{pmatrix} Q_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q_k \end{pmatrix},$$

就會使得

$$(P \cdot Q)^{-1} \cdot A \cdot (P \cdot Q) = Q^{-1} \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot Q = \begin{pmatrix} Q_1^{-1} \cdot A_1 \cdot Q_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q_k^{-1} \cdot A_k \cdot Q_k \end{pmatrix},$$

為 upper triangular matrix 了. 我們看以下的例子.

Example 4.2.6. 在 Example 3.5.10 中我們考慮 5×5 matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

因為 $\chi_A(x) = \mu_A(x) = (x-1)^3(x-2)^2$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中完全分解成一次多項式的乘積, 我們可找到 invertible matrix $M \in M_5(\mathbb{Q})$ 使得 $M^{-1} \cdot A \cdot M$ 為 upper triangular matrix.

在 Example 3.5.10 中我們已找到 $P \in M_5(\mathbb{Q})$ 將 A 化為 block diagonal matrix.

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

現在我們需將

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

化為 triangular forms. 因 $\mu_B(x) = (x-1)^3$, 考慮 $B - I_3$ 這一個 nilpotent matrix. 我們有

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由 Proposition 4.2.2 的方法首先選 $(B - I_3)^2$ 的 column space 的 basis, 我們選 $\mathbf{w}_1 = (0, -1, 1)^t$, 再加入 $B - I_3$ 的 column space 的元素 $\mathbf{w}_2$ 使得 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ 為 $B - I_3$ 的 column space 的 basis, 這裡我們選 $\mathbf{w}_2 = (-1, 1, 0)^t$. 最後再加入 $\mathbf{w}_3 \in \mathbb{Q}^3$ 使得 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ 成為 $\mathbb{Q}^3$ 的 basis, 此處我們選 $\mathbf{w}_3 = (0, 0, 1)^t$. 此時有 $B\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1$, $B\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, $B\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$, 故若令

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{則 } Q_1^{-1} \cdot B \cdot Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 為 upper triangular matrix.}$$

另一方面因 $\mu_C(x) = (x-2)^2$, 我們考慮 $C-2I_2$ 這一個 nilpotent matrix. 因 $C-2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 我們選 $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 為 $C-2I_2$ 的 basis, 再加上 $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 使得 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ 為 $\mathbb{Q}^2$ 的 basis. 此時 $C\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{u}_1$, $C\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$, 故若令 $Q_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 則 $Q_2^{-1} \cdot C \cdot Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 為 upper triangular matrix. 最後將 Q_1, Q_2 合併為 5×5 的 invertible matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

可得 upper triangular matrix

$$(P \cdot Q)^{-1} \cdot A \cdot (P \cdot Q) = Q^{-1} \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

若 T 是 diagonalizable, 我們可以利用對角化幫助我們求得 T^{oi} . 即利用 V 的 eigenvectors 所形成的 ordered basis β 得 $[T]_\beta = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \gamma_n \end{pmatrix}$, 故可得 $[T^{oi}]_\beta = \begin{pmatrix} \gamma_1^i & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \gamma_n^i \end{pmatrix}$. 當 T 不能化為 diagonal form 時, 我們可利用 trianbular form 來幫助計算 T^{oi} .

首先將 V 寫成 T -invariant subspaces 的 direct sum $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. 由於任意 $\mathbf{v} \in V$, 都可以唯一寫成 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k$, 其中 $\mathbf{v}_i \in V_i$ (Proposition 3.4.6). 對於所有的 $i = 1, \dots, k$, 我們可定義一個 linear operator $\pi_i: V \rightarrow V$, 其定義為 $\pi_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_i$. 此 linear operator 稱為 the projection to V_i with respect to the direct sum $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. 依此定義我們知道對於所有 $\mathbf{v} \in V_i$, 皆有 $\pi_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. 另一方面由於 V_i 為 T -invariant, 對於 $\mathbf{v} \in V_i$, 我們有 $T(\mathbf{v}) \in V_i$. 因此對於任意 $\mathbf{v} \in V$, 將之寫成 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k$, 其中 $\mathbf{v}_i \in V_i$, 則 $T(\pi_i(\mathbf{v})) = T(\mathbf{v}_i)$, 而 $\pi_i(T(\mathbf{v})) = \pi_i(T(\mathbf{v}_1) + \cdots + T(\mathbf{v}_k)) = T(\mathbf{v}_i)$. 得證

$$T \circ \pi_i = \pi_i \circ T, \forall i = 1, \dots, k. \quad (4.1)$$

Theorem 4.2.7. 假設 V 為 finite dimensional F -space. 若 $T: V \rightarrow V$ 為 linear operator 其 minimal polynomial 為

$$\mu_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 為 F 中相異的元素, 則 $T = T_D + T_N$ 其中 T_D 為 diagonalizable, T_N 為 nilpotent of index $m = \max\{m_1, \dots, m_k\}$, 而且 $T_D \circ T_N = T_N \circ T_D$.

Proof. 考慮 Primary Decomposition $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, 其中 $V_i = \text{Ker}((T - \lambda_i \text{id})^{m_i})$, 且令 $\pi_i: V \rightarrow V$ 為 the projection to V_i with respect to the direct sum $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. 考慮 V 的 linear operator $T_D = \lambda_1 \pi_1 + \cdots + \lambda_k \pi_k$. 因對任意 $\mathbf{v}_i \in V_i$, 皆有 $T_D(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i$, 所以每一組

V_i 的 basis, 皆由 T_D 的 eigenvectors 所組成. 故由 V 為 $V_1, \dots, V_k$ 的 direct sum, 這些 V_i 的 basis 可組成 V 的 basis. 也就是說 V 有一組 basis 皆由 T_D 的 eigenvectors 所組成, 故 T_D 為 diagonalizable.

現今 $T_N = T - T_D$ 為 V 的 linear operator. 因對任意 $\mathbf{v}_i \in V_i$, $T_N(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i) - T_D(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i) - \lambda_i \mathbf{v}_i \in V_i$, 知 V_i 皆為 T_N -invariant. 又已知 $\mu_{T|_{V_i}}(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$, 即 m_i 是最小的正整數使得 $(T - \lambda_i \text{id})^{m_i}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}_V$, $\forall \mathbf{v}_i \in V_i$, 故知 $\mu_{T_N|_{V_i}}(x) = x^{m_i}$. 利用 Lemma 3.5.6 知 $\mu_{T_N}(x) = \text{lcm}(x^{m_1}, \dots, x^{m_k}) = x^m$, 其中 $m = \max\{m_1, \dots, m_k\}$, 得證 T_N 為 nilpotent of index m .

最後因為

$$T_D \circ T = (\lambda_1 \pi_1 + \dots + \lambda_k \pi_k) \circ T = \lambda_1 (\pi_1 \circ T) + \dots + \lambda_k (\pi_k \circ T),$$

由等式 (4.1) 得

$$T \circ T_D = \lambda_1 (T \circ \pi_1) + \dots + \lambda_k (T \circ \pi_k) = T_D \circ T.$$

因此得證

$$T_D \circ T_N = T_D \circ (T - T_D) = T_D \circ T - T_D \circ T_D = T \circ T_D - T_D \circ T_D = (T - T_D) \circ T_D = T_N \circ T_D.$$

□

Question 4.8. 考慮 Theorem 4.2.4 中的 ordered basis β , 若 $[T]_\beta$ 為 upper triangular matrix, 則 Theorem 4.2.7 中的 T_D, T_N 其對 β 的 representative matrix $[T_D]_\beta, [T_N]_\beta$ 應為何?

Question 4.9. 你能利用 Theorem 4.2.7, 證明若 T 的 minimal polynomial $\mu_T(x)$ 可以完全分解成 $F[x]$ 中相異的 monic 一次多項式之乘積, 則 T 為 diagonalizable?

由 Theorem 4.2.7, 我們便能利用 triangular form 來計算 $T^{\circ i}$ 了. 由 $T_D \circ T_N = T_N \circ T_D$, 得

$$T^{\circ 2} = (T_D + T_N) \circ (T_D + T_N) = T_D^{\circ 2} + T_D \circ T_N + T_N \circ T_D + T_N^{\circ 2} = T_D^{\circ 2} + 2T_D \circ T_N + T_N^{\circ 2}.$$

故利用數學歸納法可得以下的二項式展開

$$T^{\circ i} = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} T_D^{\circ i-j} \circ T_N^{\circ j}.$$

由於 T_D 為 diagonalizable 我們很容易計算 $T_D^{\circ j}$, 而 T_N 為 nilpotent of index m , 我們知道當 $j \geq m$, $T_N^{\circ j} = \mathbf{0}$. 所以這是一個幫助我們計算 $T^{\circ i}$ 的方法.

最後我們來看 Theorem 4.2.7 相對應的矩陣的形式.

Corollary 4.2.8. 假設 $A \in M_n(F)$ 且其 characteristic polynomial 和 minimal polynomial 分別為

$$\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \dots (x - \lambda_k)^{c_k}, \mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 為 F 中相異的元素. 則存在 invertible matrix P 使得 $P^{-1} \cdot A \cdot P = D + N$, 其中 D 為 diagonal matrix, N 為 nilpotent matrix 滿足 $D \cdot N = N \cdot D$ 且 $N^m = \mathbf{0}$, $m = \max\{m_1, \dots, m_k\}$.

和 linear operator 的情況相同。當 A 化成 triangular form $P^{-1} \cdot A \cdot P = D + N$, 由於 $D \cdot N = N \cdot D$, 我們有

$$P^{-1} \cdot A^i \cdot P = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} D^{i-j} \cdot N^j.$$

因此得到一個幫助我們計算 A^i 的方法。

Exercise 4.6. Suppose that A is a 2×2 nilpotent matrix. Prove that A is similar to $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercise 4.7. Suppose that A, B are $n \times n$ matrix such that $A \cdot B = B \cdot A$ and A is nilpotent matrix of index m .

- (1) Suppose that B is invertible. Prove that $A \cdot B$ is also a nilpotent matrix of index m .
- (2) Suppose that B is nilpotent of index m' . Prove that $A \cdot B$ is a nilpotent matrix of index k with $k \leq \min\{m, m'\}$.
- (3) Suppose that B is nilpotent of index m' . Prove that $A + B$ is a nilpotent matrix of index k' with $k' \leq m + m' - 1$.
- (4) Suppose that B is not nilpotent. Show that $A + B$ is not nilpotent.

Exercise 4.8. Let F be a field and A be a $n \times n$ matrix over F . Suppose that A is nilpotent of index m and $\lambda \neq 0$ in F . Let $M = A + \lambda I_n$.

- (1) Find $\chi_M(x)$, $\mu_M(x)$ and $\det(M)$.
- (2) Show that M is invertible and $M^{-1} = \lambda^{-1}I_n - \lambda^{-2}A + \lambda^{-3}A^2 + \cdots + (-1)^{m-1}\lambda^{-m}A^{m-1}$.
- (3) Show that $M^{-1} = B + \lambda^{-1}I_n$ with B being a nilpotent matrix of index m . Find $\chi_{M^{-1}}(x)$ and $\mu_{M^{-1}}(x)$.

Exercise 4.9. Let F be a field and A be a $n \times n$ matrix over F . Suppose that

$$\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_r)^{c_r}, \quad \mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$$

with $\lambda_i \neq 0$ and $\lambda_i \neq \lambda_j$ for $i \neq j$. Show that A is invertible and

$$\chi_{A^{-1}}(x) = (x - \lambda_1^{-1})^{c_1} \cdots (x - \lambda_r^{-1})^{c_r}, \quad \mu_{A^{-1}}(x) = (x - \lambda_1^{-1})^{m_1} \cdots (x - \lambda_r^{-1})^{m_r}.$$