

# Form Reduction

對於一個 linear operator, 我們希望能找到適當的 ordered basis, 使其 representative matrix 為特殊的形式 (form). 在 matrices 來說指的就是要找到有特別 form 的 similar matrices. 我們希望得到 form 有的是所謂的 canonical form (將矩陣化為 canonical form 能幫我們判斷哪些矩陣是 similar), 還有一些 form 在數學許多領域都有重要的應用. 不過在此我們不去談論這些應用 (大家在研讀相關領域時自然會學到), 而專注於如何將一個矩陣化為這些 forms.

前一章我們提到利用 Primary Decomposition Theorem, 我們可以將 linear operator 簡化成只要考慮 characteristic polynomial 為  $p(x)^c$  這種形式的 linear operator, 其中  $p(x)$  是  $F[x]$  上的 irreducible polynomial. 我們將逐步由  $p(x)$  的可能情形來得到各種 forms.

## 4.1. Diagonal Form

這一節中, 我們將從最簡單的  $T$ -invariant subspace 出發, 引進所謂的 eigenvalue 以及 eigenvector, 再說明哪些情形可以得到 diagonal form.

對於一個 linear operator  $T:V \rightarrow V$ , 除了  $\{\mathbf{0}\}$  以外, 最簡單的  $T$ -invariant subspace 自然是 dimension 為 1 的  $T$ -invariant subspace. 現若  $U$  為  $T$ -invariant subspace 且  $\dim(U) = 1$ , 即存在  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$  使得  $U = \text{Span}(\{\mathbf{v}\})$ . 由  $U$  為  $T$ -invariant 的假設, 我們得  $T(\mathbf{v}) \in U = \text{Span}(\{\mathbf{v}\})$ . 也就是說, 存在  $\lambda \in F$  使得  $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ . 我們有以下的定義.

**Definition 4.1.1.** 假設  $T:V \rightarrow V$  為 linear operator, 若存在  $\lambda \in F$  以及  $\mathbf{v} \in V$  且  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$  使得  $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ , 則稱  $\lambda$  為  $T$  的一個 eigenvalue, 而  $\mathbf{v}$  為  $T$  的一個 eigenvector.

注意, 對於 eigenvector  $\mathbf{v}$  我們要求  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$ , 而對於 eigenvalue  $\lambda$  我們並無要求  $\lambda \neq 0$ . 也就是說  $\mathbf{0}_V$  雖符合  $T(\mathbf{0}_V) = \lambda\mathbf{0}_V$ , 但我們不考慮這種 trivial 的情形, 故不稱  $\mathbf{0}_V$  為 eigenvector. 另一方面若  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$  滿足  $T(\mathbf{v}) = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ , 表示  $\mathbf{v}$  為  $\text{Ker}(T)$  的元素. 所以若 0 為  $T$  的 eigenvalue, 表示  $\text{Ker}(T) \neq \{\mathbf{0}_V\}$ , 亦即  $T:V \rightarrow V$  不是 one-to-one.

**Question 4.1.** 假設  $V$  為 *finite dimensional vector space* 且  $T: V \rightarrow V$  為 *linear operator*. 下列哪些是等價的?

(1)  $T$  is an isomorphism (2)  $T$  is one-to-one (3)  $T$  is onto (4)  $0$  is not an eigenvalue of  $T$ .

要找到一個 *linear operator* 有哪些 *eigenvalue* 和 *eigenvector*, 程序上是先找  $T$  有哪些 *eigenvalue*, 再利用這些 *eigenvalue* 將其對應的 *eigenvector* 找出. 首先觀察若  $\lambda$  為  $T: V \rightarrow V$  的 *eigenvalue*, 則必存在  $\mathbf{v} \neq \mathbf{O}_V$  使得  $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ , 得  $\lambda\text{id}(\mathbf{v}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{O}_V$ . 也就是說  $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\lambda\text{id} - T)$ , 亦即  $\lambda\text{id} - T$  這一個 *linear operator* 不是 *isomorphism*, 利用 Lemma 3.1.4 知  $\det(\lambda\text{id} - T) = 0$ . 如何求  $\det(\lambda\text{id} - T)$ ? 回顧一下, 我們需先找  $V$  的一個 *ordered basis*  $\beta$ , 再求  $\lambda\text{id} - T$  對於  $\beta$  的 *representative matrix*  $[\lambda\text{id} - T]_\beta$ . 依定義  $\det(\lambda\text{id} - T)$  就是  $\det([\lambda\text{id} - T]_\beta)$ . 然而若  $\dim(V) = n$ , 則我們有

$$[\lambda\text{id} - T]_\beta = [\lambda\text{id}]_\beta - [T]_\beta = \lambda[\text{id}]_\beta - [T]_\beta = \lambda I_n - [T]_\beta.$$

因此若  $\lambda \in F$  是  $T$  的一個 *eigenvalue*, 則  $\det(\lambda I_n - [T]_\beta) = 0$ . 又  $T$  的 *characteristic polynomial* 為  $\chi_T(x) = \chi_{[T]_\beta}(x) = \det(xI_n - [T]_\beta)$ . 得知, 若  $\lambda \in F$  是  $T$  的一個 *eigenvalue*, 則  $\chi_T(\lambda) = 0$ . 反之, 若  $\lambda \in F$  為  $\chi_T(x) = 0$  之一根, 則  $\det(\lambda\text{id} - T) = 0$ . 表示  $\lambda\text{id} - T$  這一個 *linear operator* 不是 *one-to-one*, 亦即存在  $\mathbf{v} \in V$  且  $\mathbf{v} \neq \mathbf{O}_V$  使得  $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ . 因此我們有以下之結果.

**Proposition 4.1.2.** 假設  $V$  為 *finite dimensional vector space* 且  $T: V \rightarrow V$  為 *linear operator*. 則  $\lambda \in F$  為  $T$  的 *eigenvalue* 若且唯若  $\chi_T(\lambda) = 0$ .

當  $\dim(V) = n$  時, 由於  $\chi_T(x) \in F[x]$  是一個次數為  $n$  的多項式, 它在  $F$  中根的個數最多只有  $n$  個 (當然也可能沒有根), 所以  $T$  僅能有有限多個 *eigenvalue*. 若  $\lambda \in F$  為  $\chi_T(x)$  的一根, 則  $(x - \lambda) \mid \chi_T(x)$ . 又  $x - \lambda$  為  $F[x]$  的 *monic irreducible polynomial*, 所以若將  $\chi_T(x)$  分解成 *monic irreducible polynomials* 的乘積  $\chi_T(x) = p_1(x)^{c_1} \cdots p_k(x)^{c_k}$ . 這些  $p_i(x)$  中次數為一次的多項式就給我們一個  $T$  的 *eigenvalue*. 我們對  $x - \lambda$  可整除  $\chi_T(x)$  的最高次方有興趣, 因此有以下的定義.

**Definition 4.1.3.** 假設  $V$  為 *finite dimensional F-space*,  $T: V \rightarrow V$  為 *linear operator* 且  $\lambda$  為  $T$  的一個 *eigenvalue*. 我們稱  $x - \lambda$  可整除  $\chi_T(x)$  的最高次方為  $\lambda$  的 *algebraic multiplicity*.

依此定義, 若  $\chi_T(x) = p_1(x)^{c_1} \cdots p_k(x)^{c_k}$ , 其中  $p_1(x), \dots, p_k(x)$  為相異的 *monic irreducible polynomials* 且  $p_1(x) = x - \lambda$ , 則  $c_1$  是  $\lambda$  的 *algebraic multiplicity*.

**Question 4.2.** 若  $T: V \rightarrow V$  為 *linear operator* 且  $\dim(V) = n$ , 則  $T$  最多有多少個相異的 *eigenvalue*? 此時每個 *eigenvalue* 的 *algebraic multiplicity* 為多少?

找到  $T$  所有可能的 *eigenvalue* 後, 我們就可以決定這些 *eigenvalue* 所對應的 *eigenvector* 了. 若  $\lambda$  為 *eigenvalue*, 前面提過所有滿足  $\mathbf{v} \neq \mathbf{O}_V$  以及  $T(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{O}_V$  的元素  $\mathbf{v}$  就是 *eigenvalue* 為  $\lambda$  的 *eigenvector*. 也就是說 *eigenvalue* 為  $\lambda$  的 *eigenvector* 就是  $\text{Ker}(T - \lambda\text{id})$  中的非  $\mathbf{O}_V$  元素. 我們很自然會考慮以下的 *vector space*.

**Definition 4.1.4.** 假設  $T: V \rightarrow V$  為 linear operator 且  $\lambda$  為  $T$  的一個 eigenvalue. 令

$$E_\lambda(T) = \text{Ker}(T - \lambda \text{id}) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}.$$

稱之為  $T$  對應於  $\lambda$  的 *eigenspace* 且  $\dim(E_\lambda(T))$  稱為  $\lambda$  的 *geometric multiplicity*.

假設  $\mathbf{v} \in E_\lambda(T)$ , 由於  $T(T(\mathbf{v})) = T(\lambda \mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$ , 我們得  $T(\mathbf{v}) \in E_\lambda(T)$ . 得知  $E_\lambda(T)$  是一個  $T$ -invariant subspace.

**Question 4.3.** 你能用 *Lemma 3.5.3* 說明  $E_\lambda(T)$  為  $T$ -invariant subspace 嗎?

如何得到  $E_\lambda(T)$  呢? 我們仍是利用 ordered basis  $\beta$  得到  $[T - \lambda \text{id}]_\beta = [T]_\beta - \lambda I_n$  這一個 matrix, 再求  $[T]_\beta - \lambda I_n$  的 null space  $N([T]_\beta - \lambda I_n) = \{\mathbf{x} \in F^n \mid ([T]_\beta - \lambda I_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ . 再利用  $\beta$  將  $N([T]_\beta - \lambda I_n)$  中的元素還原回  $V$  中的元素, 就是  $E_\lambda(T)$  的元素, 而且  $\dim(N([T]_\beta - \lambda I_n)) = \dim(E_\lambda(T))$  就是  $\lambda$  的 geometric multiplicity.

**Example 4.1.5.** 考慮  $T: M_2(F) \rightarrow M_2(F)$  定義為  $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ . 考慮  $M_2(F)$  上的 ordered basis  $\beta = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ , 則  $T$  對於  $\beta$  的 representative matrix 為

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求得  $\chi_T(x) = \chi_{[T]_\beta}(x) = (x-1)^3(x+1)$ . 所以 1 和  $-1$  為  $T$  的 eigenvalue, 它們的 algebraic multiplicity 分別為 3 和 1.

要求  $T$  對於 1 的 eigenspace  $E_1(T)$ , 我們先考慮  $N([T]_\beta - I_4)$ , 即解聯立方程組

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{也就是解} \begin{cases} 0 & = & 0 \\ -x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases}$$

解得  $N([T]_\beta - I_4) = \{(x_1, x_2, x_2, x_4)^t \mid x_1, x_2, x_4 \in F\}$ . 知 1 的 geometric multiplicity 為 3 且

$$E_1(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_4 \in F \right\}.$$

同理, 對於  $-1$  的 eigenspace  $E_{-1}(T)$ , 我們先考慮  $N([T]_\beta - (-1)I_4)$ , 即解聯立方程組

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{也就是解} \begin{cases} 2x_1 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

解得  $N([T]_\beta - (-1)I_4) = \{(0, x_2, -x_2, 0)^t \mid x_2 \in F\}$ . 知  $-1$  的 geometric multiplicity 為 1 且

$$E_{-1}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ -x_2 & 0 \end{pmatrix} \mid x_2 \in F \right\}.$$

Algebraic multiplicity 並不一定會等於 geometric multiplicity, 我們看一個簡單的例子.

**Example 4.1.6.** 考慮  $T: P_1(F) \rightarrow P_1(F)$  定義為  $T(ax+b) = bx$ , 並考慮  $P_1(F)$  的 ordered basis  $\beta = (x, 1)$ . 我們有  $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 得  $\chi_T(x) = x^2$ . 所以 0 是  $T$  唯一的 eigenvalue 且其 algebraic multiplicity 為 2. 要求  $N([T]_\beta - 0I_2) = N([T]_\beta)$  即解  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  得  $b = 0$ , 即  $N([T]_\beta - 0I_2) = \{(a, 0)^t \mid a \in F\}$ . 故 0 的 geometric multiplicity 為 1 且  $E_0(T) = \{ax \mid a \in F\}$ .

雖然  $T$  的一個 eigenvalue  $\lambda$  的 algebraic multiplicity 和 geometric multiplicity 有可能不同, 不過它們之間仍有著某種關係存在. 我們利用 Primary Decomposition Theorem 來說明. 利用 Theorem 3.5.8 的符號, 假設

$$\mu_T(x) = p_1(x)^{m_1} \cdots p_k(x)^{m_k} \quad \text{and} \quad \chi_T(x) = p_1(x)^{c_1} \cdots p_k(x)^{c_k}$$

其中  $p_1(x), \dots, p_k(x)$  為相異的 monic irreducible polynomials 且因為  $\lambda$  為  $T$  的 eigenvalue, 我們令  $p_1(x) = x - \lambda$ . 若令  $V_i = \text{Ker}(p_i(T)^{m_i})$ , for  $i = 1, \dots, k$ , 則 Primary Decomposition Theorem (Theorem 3.5.8) 告訴我們

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

且

$$\mu_{T|_{V_i}}(x) = p_i(x)^{m_i} \quad \text{and} \quad \chi_{T|_{V_i}}(x) = p_i(x)^{c_i}, \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

因假設  $p_1(x) = x - \lambda$ , 我們有

$$V_1 = \text{Ker}((T - \lambda \text{id})^{m_1}) \supseteq \text{Ker}(T - \lambda \text{id}) = E_\lambda(T).$$

由此知  $\lambda$  的 geometric multiplicity  $\dim(E_\lambda(T)) \leq \dim(V_1)$ . 另一方面, 依定義  $c_1$  為  $\lambda$  的 algebraic multiplicity, 而又  $\chi_{T|_{V_1}}(x) = (x - \lambda)^{c_1}$ , 知  $\deg(\chi_{T|_{V_1}}(x)) = c_1$ . 因為一個 linear operator 的 characteristic polynomial 的 degree 為此 operator 所在的 space 之 dimension, 故得  $\dim(V_1) = c_1$ . 因此我們知  $\dim(E_\lambda(T)) \leq c_1$ , 得到以下的結果.

**Lemma 4.1.7.** 若  $V$  為 finite dimensional  $F$ -space,  $T: V \rightarrow V$  為 linear operator 且  $\lambda$  為  $T$  的一個 eigenvalue, 則  $\lambda$  的 algebraic multiplicity 大於等於其 geometric multiplicity.

當  $\lambda$  是  $T$  的 eigenvalue 時, 由於  $E_\lambda(T)$  存在著非  $\mathbf{0}_V$  的元素, 故知  $\dim(E_\lambda(T)) \geq 1$ , 也就是說  $\lambda$  的 geometric multiplicity 必大於等於 1. 此時若  $\lambda$  的 algebraic multiplicity 是 1, 則由 Lemma 4.1.7 知  $\lambda$  的 algebraic multiplicity 等於其 geometric multiplicity (即  $\lambda$  的 geometric multiplicity 等於 1). 在一般的情形, 什麼時候  $\lambda$  的 algebraic multiplicity 會等於其 geometric multiplicity 呢? 我們有以下的結果.

**Proposition 4.1.8.** 假設  $V$  為 finite dimensional  $F$ -space,  $T: V \rightarrow V$  為 linear operator 且  $\lambda$  為  $T$  的一個 eigenvalue. 則  $\lambda$  的 algebraic multiplicity 等於其 geometric multiplicity 若且唯若  $x - \lambda \mid \mu_T(x)$  但  $(x - \lambda)^2 \nmid \mu_T(x)$ .

**Proof.** 我們用前面一樣的符號, 設  $\mu_T(x) = p_1(x)^{m_1} \cdots p_k(x)^{m_k}$  以及  $\chi_T(x) = p_1(x)^{c_1} \cdots p_k(x)^{c_k}$ , 其中  $p_1(x) = x - \lambda$ . 又令  $V_1 = \text{Ker}((T - \lambda \text{id})^{m_1})$ . 若  $x - \lambda \mid \mu_T(x)$  但  $(x - \lambda)^2 \nmid \mu_T(x)$ , 此即表示  $m_1 = 1$ , 故得  $V_1 = \text{Ker}(T - \lambda \text{id}) = E_\lambda(T)$ . 前面已知  $\dim(V_1)$  為  $\lambda$  的 algebraic multiplicity, 而依定義  $\dim(E_\lambda(T))$  為  $\lambda$  的 geometric multiplicity, 故得證它們相等.

反過來, 若  $\lambda$  的 algebraic multiplicity 等於其 geometric multiplicity, 即表示  $\dim(V_1) = \dim(E_\lambda(T))$ , 故得  $V_1 = \text{Ker}(T - \lambda \text{id})$ . 換句話說, 對於任意  $\mathbf{v} \in V_1$ ,  $T(\mathbf{v}) - \lambda \text{id}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V$ . 這告訴我們  $T - \lambda \text{id}$  限制在  $V_1$  上是一個 zero mapping, 即  $(T - \lambda \text{id})|_{V_1} = T|_{V_1} - \lambda \text{id}|_{V_1} = \mathbf{0}$ . 也就是說, 若令  $h(x) = x - \lambda$ , 得  $h(T|_{V_1}) = \mathbf{0}$ . 因此由 Lemma 3.3.5 知  $T|_{V_1}$  的 minimal polynomial  $\mu_{T|_{V_1}}(x)$  整除  $h(x) = x - \lambda$ . 然而 Theorem 3.5.8 告訴我們  $\mu_{T|_{V_1}}(x) = (x - \lambda)^{m_1}$ , 故得證  $m_1 = 1$ .  $\square$

特別的, 假設  $\chi_T(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中的一次多項式的乘積, 亦即  $\chi_T(x) = p_1(x)^{c_1} \cdots p_k(x)^{c_k}$ , 其中每一個  $p_i(x)$  皆為一次多項式  $x - \lambda_i$ . 此時若每一個  $\lambda_i$  的 algebraic multiplicity 和 geometric multiplicity 皆相等, 則由 Proposition 4.1.8 知  $\mu_T(x) = p_1(x) \cdots p_k(x)$ , 因此得  $V_i = \text{Ker}(T - \lambda_i \text{id}) = E_{\lambda_i}(T)$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ . 因此由 Primary Decomposition Theorem 知

$$V = E_{\lambda_1}(T) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}(T).$$

也就是說此時  $V$  就會是 eigenspaces 的 (internal) direct sum. 因為每個 eigenspace 中的非  $\mathbf{0}_V$  元素皆為  $T$  的 eigenvector, 所以  $E_{\lambda_i}(T)$  中的任一組 basis  $S_i$  皆由  $T$  的 eigenvector 所組成. 又因  $V = E_{\lambda_1}(T) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}(T)$ , Proposition 3.4.6 告訴我們  $S_1 \cup \cdots \cup S_k$  為  $V$  的一組 basis, 也就是說  $V$  有一組 basis 是由  $T$  的 eigenvector 所組成. 現假設  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  為  $V$  的一組 basis, 其中  $\mathbf{v}_i$  為  $T$  的 eigenvector 且其對應的 eigenvalue 為  $\gamma_i$  (這裡  $\gamma_i$  不一定相異), 此時考慮  $V$  的 ordered basis  $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ . 由於對所有  $i = 1, \dots, n$ , 皆有  $T(\mathbf{v}_i) = \gamma_i \mathbf{v}_i$ , 我們得到

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \gamma_n \end{pmatrix}$$

為一個 diagonal matrix (對角矩陣). 因此有以下之定義.

**Definition 4.1.9.** 假設  $V$  為 finite dimensional  $F$ -space 且  $T: V \rightarrow V$  為 linear operator. 若  $V$  存在一組 basis 是由  $T$  的 eigenvectors 所組成, 則稱  $T$  為一個 *diagonalizable linear operator*.

我們有以下等價的關係來判斷一個 linear operator 是否為 diagonalizable.

**Theorem 4.1.10.** 假設  $V$  為 finite dimensional  $F$ -space 且  $T: V \rightarrow V$  為 linear operator. 則以下是等價的.

- (1)  $T$  是一個 *diagonalizable linear operator*.
- (2) 存在  $V$  的 ordered basis  $\beta$  使得  $[T]_\beta$  為一個 *diagonal matrix*.

- (3)  $T$  的 *characteristic polynomial*  $\chi_T(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中的一次多項式之乘積，且  $T$  的每一個 *eigenvalue* 的 *algebraic multiplicity* 和 *geometric multiplicity* 相等。
- (4)  $T$  的 *minimal polynomial*  $\mu_T(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中相異的 *monic* 一次多項式之乘積。

**Proof.** 前面我們已知 (3)  $\Rightarrow$  (1) 且 (1)  $\Rightarrow$  (2)，現要證明 (2)  $\Rightarrow$  (4)。假設  $\dim(V) = n$  且  $\beta$  為  $V$  的 ordered basis 使得

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \gamma_n \end{pmatrix}$$

為一個 diagonal matrix。現假設  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  皆相異且  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ 。亦即對任意  $\gamma_i$  皆存在  $\lambda_j$  使得  $\gamma_i = \lambda_j$ 。依定義  $\chi_T(x) = \chi_{[T]_{\beta}}(x) = (x - \gamma_1) \cdots (x - \gamma_n) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}$ ，其中  $c_i \in \mathbb{N}$ 。而且由 Theorem 3.3.7 (或 Theorem 3.3.9) 知  $\mu_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$ ，其中  $m_i \in \mathbb{N}$ 。現考慮  $h(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$ ，由 Lemma 3.2.1 得

$$\begin{aligned} h([T]_{\beta}) &= ([T]_{\beta} - \lambda_1 I_n) \cdots ([T]_{\beta} - \lambda_k I_n) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1 - \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \gamma_n - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \gamma_1 - \lambda_k & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \gamma_n - \lambda_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\gamma_1 - \lambda_1) \cdots (\gamma_1 - \lambda_k) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & (\gamma_n - \lambda_1) \cdots (\gamma_n - \lambda_k) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

然而每個  $\gamma_i$  皆存在  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  使得  $\gamma_i = \lambda_j$ ，故得  $h([T]_{\beta}) = \mathbf{0}$ ，亦即  $h(T) = \mathbf{0}$ 。所以由 Lemma 3.3.5 得  $\mu_T(x) \mid h(x)$ ，得證  $\mu_T(x) = h(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$ ，亦即  $T$  的 minimal polynomial  $\mu_T(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中相異的 monic 一次多項式之乘積。

最後我們要證明 (4)  $\Rightarrow$  (3)。假設  $\mu_T(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$ ，其中  $\lambda_i \in F$  且皆相異。由 Theorem 3.3.7，知  $\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}$  其中  $c_i \in \mathbb{N}$ ，即  $\chi_T(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中的一次多項式之乘積。然而  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  為  $T$  的所有 eigenvalues，且對於每一個  $i = 1, \dots, k$  皆有  $(x - \lambda_i) \mid \mu_T(x)$  但  $(x - \lambda_i)^2 \nmid \mu_T(x)$ 。故 Proposition 4.1.8 告訴我們每個  $\lambda_i$  的 algebraic multiplicity 和 geometric multiplicity 皆相等。得證本定理。  $\square$

**Question 4.4.** 假設  $\dim(V) = n$ ,  $T : V \rightarrow V$  為 linear operator。若  $T$  有  $n$  個相異的 eigenvalue，則  $T$  是否為 diagonalizable?

**Question 4.5.** Example 4.1.5 和 Example 4.1.6 中哪一個  $T$  是 diagonalizable?

雖然前面都是談 linear operator，我們要強調這些性質對於  $n \times n$  的方陣也有相對應的地方。首先若  $A \in M_n(F)$ ，我們也有所謂的 eigenvalue 以及 eigenvector。

**Definition 4.1.11.** 假設  $A \in M_n(F)$ 。若存在  $\lambda \in F$  以及  $\mathbf{x} \in F^n$  且  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  使得  $A \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ ，則稱  $\lambda$  為  $A$  的一個 eigenvalue，而  $\mathbf{x}$  為  $T$  的一個 eigenvector。

接下來利用  $A$  的 characteristic polynomial  $\chi_A(x)$  來得到  $A$  的 eigenvalues  $\lambda$  以及求  $N(A - \lambda I_n)$  來得到  $A$  相對於  $\lambda$  的 eigenvector, 還有關於 eigenvalue 的 algebraic multiplicity 和 geometric multiplicity, ... 等性質, 我們就不再贅敘.

**Question 4.6.** 若  $A \in M_n(F)$ ,  $\lambda$  為  $A$  的 eigenvalue, 你能定義  $\lambda$  的 algebraic multiplicity 和 geometric multiplicity 嗎? 你能寫出  $A$  相對於 Lemma 4.1.7 以及 Proposition 4.1.6 的定理嗎?

我們也可定義何謂 diagonalizable matrix 如下.

**Definition 4.1.12.** 假設  $A \in M_n(F)$ . 若存在一組  $F^n$  basis 是由  $A$  的 eigenvectors 所組成, 則稱  $A$  為一個 diagonalizable matrix.

我們也有如同 Theorem 4.1.10 判斷  $A$  是否為 diagonalizable 的等價方法. 因為證明就如同 linear operator 的情形, 我們就不再重複.

**Theorem 4.1.13.** 假設  $A \in M_n(F)$ . 則以下是等價的.

- (1)  $A$  是一個 diagonalizable matrix.
- (2) 存在  $P \in M_n(F)$  為 invertible 使得  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  為一個 diagonal matrix.
- (3)  $\chi_A(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中的一次多項式之乘積, 且  $A$  的每一個 eigenvalue 的 algebraic multiplicity 和 geometric multiplicity 相等.
- (4)  $\mu_A(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中相異的 monic 一次多項式之乘積.

當  $A$  為 diagonalizable, Theorem 4.1.13 (2) 中  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  這一個 diagonal matrix 就稱為  $A$  的 diagonal form. 我們特別說明一下如何找到  $P$  將  $A$  化為 diagonal form. 假設

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \gamma_n \end{pmatrix},$$

且令  $P_i \in F^n$  為  $P$  的  $i$ -th column. 前面提過求兩個矩陣相乘其  $i$ -th column 的方法, 我們有  $A \cdot P$  的  $i$ -th column 為  $A \cdot P_i$ , 而  $P \cdot D$  的  $i$ -th column 為  $\gamma_i P_i$ , 所以利用  $A \cdot P = P \cdot D$  得  $A \cdot P_i = \lambda P_i$ , 也就是說  $P$  的  $i$ -th column  $P_i$  就是一個 eigenvalue 為  $\gamma_i$  的 eigenvector. 因此我們只要將一個 diagonalizable matrix  $A$  的 eigenvectors 所組成  $F^n$  的一組 basis, 按照順序一個 column 一個 column 填入, 所得的 invertible matrix  $P$ , 就是可以將  $A$  對角化. 也就是說  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  為一個對角矩陣.

最後我們說明為何兩個 diagonalizable matrices, 將其化成 diagonal form 後就可以判斷其是否為 similar. 首先強調若  $A$  為 diagonalizable, 且  $B \sim A$ , 則  $B$  必為 diagonalizable. 這是因為假設  $P$  為 invertible 且  $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$  為 diagonal matrix. 由存在  $Q$  為 invertible 使得  $B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$ , 得

$$(Q^{-1} \cdot P)^{-1} \cdot B \cdot (Q^{-1} \cdot P) = (P^{-1} \cdot Q) \cdot (Q^{-1} \cdot A \cdot Q) \cdot (Q^{-1} \cdot P) = P^{-1} \cdot A \cdot P = D.$$

又因  $Q^{-1} \cdot P$  為 invertible 得證  $B$  為 diagonalizable.

另一方面若  $A, B$  皆為 diagonalizable, 若  $A \sim B$ , 表示它們有相同的 characteristic polynomial, 因此有相同的 eigenvalues 且  $A$  和  $B$  同一個 eigenvalue 的 algebraic multiplicity 皆相等. 而每一個 eigenvalue 的 algebraic multiplicity 又等於其 geometric multiplicity, 所以將  $A, B$  化為 diagonal form 後同一個 eigenvalue 發生在的對角線上的次數會相同. 反之, 若將  $A, B$  化為 diagonal form 後同一個 eigenvalue 發生在的對角線上的次數相同, 表示將 diagonal form 對角線位置適當互換後, 兩個 diagonal form 會相等. 然而對角線位置互換只是將 eigenvector 所形成的 ordered basis 做適當重新排序 (例如將  $(i, i)$ -th entry 和  $(j, j)$ -th entry 互換只是將原來  $P$  的  $i$ -th column 和  $j$ -th column 互換), 所以得知  $A \sim B$ .

## 4.2. Triangular Form

當 linear operator  $T$  的 characteristic polynomial 可完全分解成一次的多項式的乘積時,  $T$  不一定是 diagonalizable. 這一節中我們將探討在這種情形時  $T$  可以化成怎樣的形式.

注意本節中我們仍假設  $\chi_T(x)$  可以完全分解成一次的多項式的乘積 (即  $\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}$ ). 這個假設當  $V$  over 的 field  $F$  是 algebraically closed (例如  $F = \mathbb{C}$ ) 時自然會成立. 利用 Primary Decomposition Theorem, 我們假設  $T$  的 minimal polynomial 為  $\mu_T(x) = (x - \lambda)^m$ . 也就是說  $(T - \lambda \text{id})^m = \mathbf{O}$ .

當一個 linear operator  $T: V \rightarrow V$  滿足  $T^m = \mathbf{O}$ , 我們稱之為 *nilpotent*, 而最小的正整數  $m$  使得  $T^m = \mathbf{O}$ , 稱為這個 nilpotent operator 的 *index*. 因為我們假設  $T - \lambda \text{id}$  為 nilpotent 且 index 為  $m$ . 我們來特別探討 nilpotent operator 的性質.

對於一個 linear operator  $T: V \rightarrow V$ . 若  $\mathbf{v} \in \text{Im}(T^{oi})$ , 表示存在  $\mathbf{u} \in V$  使得  $\mathbf{v} = T^{oi}(\mathbf{u})$ , 因此當  $i \geq 2$  時, 我們有  $\mathbf{v} = T^{oi-1}(T(\mathbf{u})) \in \text{Im}(T^{oi-1})$ . 所以我們自然有以下的 chain of subspaces

$$V \supseteq \text{Im}(T) \supseteq \text{Im}(T^{\circ 2}) \supseteq \cdots \supseteq \text{Im}(T^{oi-1}) \supseteq \text{Im}(T^{oi}) \supseteq \cdots.$$

特別的, 當  $T$  為 nilpotent of index  $m$ , 我們有以下情形.

**Lemma 4.2.1.** 假設  $\dim(V) > 0$ , 若  $T$  為 nilpotent operator of index  $m$ , 則我們有以下的 chain of subspaces.

$$V \supsetneq \text{Im}(T) \supsetneq \text{Im}(T^{\circ 2}) \supsetneq \cdots \supsetneq \text{Im}(T^{oi-1}) \supsetneq \text{Im}(T^{oi}) \supsetneq \cdots \supsetneq \text{Im}(T^{om-1}) \supsetneq \text{Im}(T^{om}) = \{\mathbf{O}_V\}.$$

**Proof.** 首先說明  $\text{Im}(T^{om-1}) \supsetneq \text{Im}(T^{om}) = \{\mathbf{O}_V\}$ . 因為  $T^{om} = \mathbf{O}$ , 亦即對任意  $\mathbf{v} \in V$ ,  $T^{om}(\mathbf{v}) = \mathbf{O}_V$ , 所以  $\text{Im}(T^{om}) = \{\mathbf{O}_V\}$ . 另一方面, 若  $\text{Im}(T^{om-1}) = \text{Im}(T^{om}) = \{\mathbf{O}_V\}$ , 則表示  $T^{om-1} = \mathbf{O}$ , 此與  $m$  為最小的正整數使得  $T^{om} = \mathbf{O}$  相矛盾, 故知  $\text{Im}(T^{om-1}) \neq \text{Im}(T^{om})$ .

接下來我們說明  $V \supsetneq \text{Im}(T)$ . 若  $\text{Im}(T) = V$ , 表示對任意  $\mathbf{v} \in V$  皆存在  $\mathbf{v}_1 \in V$  使得  $\mathbf{v} = T(\mathbf{v}_1)$ . 而  $\mathbf{v}_1 \in V$ , 故存在  $\mathbf{v}_2 \in V$  使得  $\mathbf{v} = T(\mathbf{v}_1) = T^{\circ 2}(\mathbf{v}_2)$ , 得  $V = \text{Im}(T^{\circ 2})$ . 如此一直下去, 我們可證得  $V = \text{Im}(T^{oi})$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ . 因  $V \neq \{\mathbf{O}_V\}$ , 此與  $T$  為 nilpotent 相矛盾, 故知  $V \neq \text{Im}(T)$ .

同理, 當  $1 \leq i \leq m-2$ , 因對於所有  $\mathbf{v} \in \text{Im}(T^{oi+1})$  皆存在  $\mathbf{u} \in V$  使得  $\mathbf{v} = T^{oi+1}(\mathbf{u}) = T(T^{oi}(\mathbf{u}))$ . 現若  $\text{Im}(T^{oi}) = \text{Im}(T^{oi+1})$ , 則由  $T^{oi}(\mathbf{u}) \in \text{Im}(T^{oi}) = \text{Im}(T^{oi+1})$  知存在  $\mathbf{w} \in V$  使得  $T^{oi}(\mathbf{u}) = T^{oi+1}(\mathbf{w})$ . 亦即  $\mathbf{v} = T(T^{oi}(\mathbf{u})) = T^{oi+2}(\mathbf{w}) \in \text{Im}(T^{oi+2})$ , 得證  $\text{Im}(T^{oi+1}) = \text{Im}(T^{oi+2})$ . 如此一直下去會推得  $\text{Im}(T^{om-1}) = \text{Im}(T^{om})$ , 此與前面所得  $\text{Im}(T^{om-1}) \neq \text{Im}(T^{om})$  相矛盾, 故知  $\text{Im}(T^{oi}) \neq \text{Im}(T^{oi+1})$ , 得證本定理.  $\square$

接下來我們說明若  $\dim(V) = n$  且  $T: V \rightarrow V$  為 nilpotent operator of index  $m$ , 如何將其化為 triangular form. 首先選取  $\text{Im}(T^{om-1})$  的 ordered basis  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1})$ , 注意此時我們有  $T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T^{om}) = \{\mathbf{0}_V\}$ , 故

$$T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}_V, \forall i = 1, \dots, k_1.$$

接著加入  $\{\mathbf{v}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}\}$  使得  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2})$  為  $\text{Im}(T^{om-2})$  的 ordered basis. 此時我們有

$$T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T^{om-1}) = \text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}\}), \forall i = k_1 + 1, \dots, k_2,$$

而且利用 ordered basis  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2})$  所得  $T|_{\text{Im}(T^{om-2})}$  的 representative matrix 為

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{k_1, k_1} & * \\ \mathbf{0}_{k_2-k_1, k_1} & \mathbf{0}_{k_2-k_1, k_2-k_1} \end{pmatrix},$$

其中  $\mathbf{0}_{i,j}$  表示為  $i \times j$  階的零矩陣, 而右上角的  $*$  為一個  $k_1 \times k_2 - k_1$  階的非零矩陣. 接下來加入  $\{\mathbf{v}_{k_2+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_3}\}$  使得  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}, \dots, \mathbf{v}_{k_3})$  為  $\text{Im}(T^{om-3})$  的 ordered basis. 此時我們有

$$T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T^{om-2}) = \text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}\}), \forall i = k_2 + 1, \dots, k_3,$$

而且利用 ordered basis  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}, \dots, \mathbf{v}_{k_3})$  所得  $T|_{\text{Im}(T^{om-3})}$  的 representative matrix 為

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{k_1, k_1} & * & * \\ \mathbf{0}_{k_2-k_1, k_1} & \mathbf{0}_{k_2-k_1, k_2-k_1} & * \\ \mathbf{0}_{k_3-k_2, k_1} & \mathbf{0}_{k_3-k_2, k_2-k_1} & \mathbf{0}_{k_3-k_2, k_3-k_2} \end{pmatrix}.$$

這樣一直下去我們可得到  $\text{Im}(T)$  的 ordered basis  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}})$ , 其中對於  $j = 1, \dots, m-1$ , 皆有  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_j})$  為  $\text{Im}(T^{om-j})$  的 ordered basis 且

$$T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T^{om-(j-1)}) = \text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{j-1}}\}), \forall i = k_{j-1} + 1, \dots, k_j.$$

最後加入  $\{\mathbf{v}_{k_{m-1}+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  使得  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}}, \dots, \mathbf{v}_n)$  為  $V$  的 ordered basis, 此時

$$T(\mathbf{v}_i) \in \text{Im}(T) = \text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}}\}), \forall i = k_{m-1} + 1, \dots, k_n,$$

而且利用 ordered basis  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}}, \dots, \mathbf{v}_n)$  所得  $T$  的 representative matrix 為

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

這一個矩陣是對角線皆為 0 的 upper triangular matrix (上三角矩陣), 所以我們有以下的結果.

**Proposition 4.2.2.** 假設  $V$  為 *finite dimensional  $F$ -space* 且  $T: V \rightarrow V$  為 *linear operator*. 則  $T$  為 *nilpotent* 若且唯若存在  $V$  的 *ordered basis*  $\beta$  使得  $[T]_\beta$  為 *upper triangular matrix* 且  $[T]_\beta$  的對角線皆為 0.

**Proof.** 由前面的討論我們知: 若  $T$  為 *nilpotent*, 則存在  $V$  的 *ordered basis*  $\beta$  使得  $[T]_\beta$  為 *upper triangular matrix* 且其對角線皆為 0. 反之, 若  $[T]_\beta$  為 *upper triangular matrix* 且其對角線皆為 0, 我們知  $\chi_T(x) = \chi_{[T]_\beta}(x) = x^n$  (其中  $n = \dim(V)$ ), 故知  $T^{0n} = \mathbf{O}$ , 得證  $T$  為 *nilpotent*.  $\square$

**Question 4.7.** 若  $V$  為 *finite dimensional  $F$ -space* 且  $T: V \rightarrow V$  為 *nilpotent operator of index  $m$* , 則  $\chi_T(x)$  為何? 又  $\mu_T(x)$  為何?

回顧一下, 對於 *linear operator*  $T: V \rightarrow V$ , 要找到  $\text{Im}(T)$ , 我們可以利用  $V$  的 *ordered basis*  $\beta$ , 先得到 *representative matrix*  $[T]_\beta$ . 再求  $[T]_\beta$  的 *column space*  $C([T]_\beta)$  (我們用  $C(A)$  表示矩陣  $A$  的 *column space*). 接著將 *column space* 的元素用  $\tau_\beta^{-1}$  還原成  $V$  的元素, 就得到  $\text{Im}(T)$  的元素了. 我們看以下化為 *upper triangular matrix* 的例子.

**Example 4.2.3.** 考慮 *linear operator*  $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ , 定義為  $T(ax^2 + bx + c) = (c - a)x^2 + cx + (c - a)$ . 若考慮  $P_2(\mathbb{R})$  的 *ordered basis*  $\beta = (x^2, x, 1)$ , 我們有  $[T]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 得

$\chi_T(x) = x^3$ . 又  $[T]_\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  知  $\mu_T(x) = x^3$ , 即  $T$  為 *nilpotent of index 3*. 因  $[T]_\beta^2$

的 *column space* 為  $\text{Span}(\{(0, 1, 0)^t\})$ , 我們得  $\text{Im}(T^{\circ 2}) = \text{Span}(\{x\})$ . 同理由  $[T]_\beta$  的 *column space*, 可得  $\text{Im}(T) = \text{Span}(\{x, x^2 + 1\})$ . 最後因  $x^2 \notin \text{Im}(T)$ , 我們可以考慮  $P_2(\mathbb{R})$  的 *ordered basis*  $\beta' = (x, x^2 + 1, x^2)$ . 因

$$T(x) = 0, T(x^2 + 1) = 1x + 0(x^2 + 1) + 0x^2, T(x^2) = 0x + (-1)(x^2 + 1) + 0x^2$$

得  $[T]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  這一個 *diagonal* 皆為 0 的 *upper triangular matrix*.

現在我們回到  $T$  的 *minimal polynomial* 為  $\mu_T(x) = (x - \lambda)^m$  的情形, 此時  $T - \lambda \text{id}$  為 *nilpotent* 所以由 Proposition 4.2.2 知存在 *ordered basis*  $\beta$  使得  $[T - \lambda \text{id}]_\beta = U$  為一個 *diagonal* 皆為 0 的 *upper triangular matrix*

$$U = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

然而若  $\dim(V) = n$ , 因  $[T - \lambda \text{id}]_\beta = [T]_\beta - \lambda I_n$ , 故得  $[T]_\beta = \lambda I_n + U$ , 為一個 *diagonal* 皆為  $\lambda$  的 *upper triangular matrix*

$$\lambda I_n + U = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ & \ddots & * \\ \mathbf{O} & & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Theorem 4.2.4.** 假設  $V$  為 *finite dimensional  $F$ -space*. 若  $T:V \rightarrow V$  為 *linear operator* 其 *characteristic polynomial* 為

$$\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k},$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  為  $F$  中相異的元素, 則存在  $V$  的 *ordered basis*  $\beta$  使得

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & A_k \end{pmatrix},$$

其中每個  $A_i$  為  $c_i \times c_i$  階的 *upper triangular matrix*

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & * & * \\ & \ddots & * \\ \mathbf{O} & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

**Proof.** 由 Theorem 3.3.9 知存在  $m_i \leq c_i$  使得  $\mu_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$ , 故由 Primary Decomposition Theorem, 我們知  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ , 其中  $V_i = \text{Ker}((T - \lambda_i \text{id})^{m_i})$  且  $\mu_{T|_{V_i}}(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$ . 得  $T|_{V_i} - \lambda_i \text{id}|_{V_i}$  為 nilpotent, 故利用 Proposition 4.2.2, 我們知存在  $\beta_i$  為  $V_i$  的 *ordered basis*, 使得  $[T|_{V_i}]_{\beta_i}$  為  $A_i$  這樣的  $c_i \times c_i$  階的 *upper triangular matrix*. 故將  $\beta_1, \dots, \beta_k$  依序排列形成  $V$  的 *ordered basis*  $\beta$ , 可得  $[T]_\beta$  為所要的 *triangular matrix*.  $\square$

Theorem 4.2.4 告訴我們當  $T$  的 *characteristic polynomial* 可完全分解成  $F[x]$  中的一次多項式乘積, 雖然  $T$  可能不能化成 *diagonal form* 不過一定可以化成 *triangular form*.

接著我們來看 *linear operator* 相對應到  $n \times n$  *matrix* 的結論.

**Theorem 4.2.5.** 假設  $A \in M_n(F)$  且其 *characteristic polynomial* 和 *minimal polynomial* 分別為

$$\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}, \mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  為  $F$  中相異的元素. 則存在 *invertible matrix*  $P$  使得

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & A_k \end{pmatrix},$$

其中每個  $A_i$  為  $c_i \times c_i$  階的 *upper triangular matrix*

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & * & * \\ & \ddots & * \\ \mathbf{O} & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

假設  $A \in M_n(F)$  且  $\chi_A(X) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}$ ,  $\mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$ . 我們說明如何找到 *invertible matrix*  $M$  使得  $M^{-1} \cdot A \cdot M$  為 *upper triangular matrix*. 首先我們

利用 Chapter 3 primary decomposition 的方法找到 invertible matrix  $P$  使得  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  為 block diagonal matrix

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_k \end{pmatrix},$$

接著考慮每一個  $c_i \times c_i$  matrix  $A_i$ . 因為  $\mu_{A_i}(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$ ,  $A_i - \lambda_i I_{c_i}$  是 nilpotent of index  $m_i$ , 我們可以利用 Proposition 4.2.2 的方法首先找  $(A_i - \lambda_i I_{c_i})^{m_i-1}$  的 column space 的一組 basis (此即相對於 Proposition 4.2.2 中  $\text{Im}(T^{o_{m-1}})$  的 basis), 然後擴大成  $(A_i - \lambda_i I_{c_i})^{m_i-2}$  的 column space 的一組 basis, 這樣一直下去直到擴大成  $F^{c_i}$  的一組 basis. 若令這組 basis 以 column by column 依序組成的  $c_i \times c_i$  的 matrix 為  $Q_i$ , 則我們有  $Q_i^{-1} \cdot A_i \cdot Q_i$  為 upper triangular matrix. 最後將這些  $Q_i$  在 diagonal 的位置依序放入, 組成  $n \times n$  的 invertible matrix

$$\begin{pmatrix} Q_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q_k \end{pmatrix},$$

就會使得

$$(P \cdot Q)^{-1} \cdot A \cdot (P \cdot Q) = Q^{-1} \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot Q = \begin{pmatrix} Q_1^{-1} \cdot A_1 \cdot Q_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q_k^{-1} \cdot A_k \cdot Q_k \end{pmatrix},$$

為 upper triangular matrix 了. 我們看以下的例子.

**Example 4.2.6.** 在 Example 3.5.10 中我們考慮  $5 \times 5$  matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

因為  $\chi_A(x) = \mu_A(x) = (x-1)^3(x-2)^2$  在  $\mathbb{Q}[x]$  中完全分解成一次多項式的乘積, 我們可找到 invertible matrix  $M \in M_5(\mathbb{Q})$  使得  $M^{-1} \cdot A \cdot M$  為 upper triangular matrix.

在 Example 3.5.10 中我們已找到  $P \in M_5(\mathbb{Q})$  將  $A$  化為 block diagonal matrix.

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

現在我們需將

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

化為 triangular forms. 因  $\mu_B(x) = (x-1)^3$ , 考慮  $B-I_3$  這一個 nilpotent matrix. 我們有

$$B-I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B-I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由 Proposition 4.2.2 的方法首先選  $(B-I_3)^2$  的 column space 的 basis, 我們選  $\mathbf{w}_1 = (0, -1, 1)^t$ , 再加入  $B-I_3$  的 column space 的元素  $\mathbf{w}_2$  使得  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$  為  $B-I_3$  的 column space 的 basis, 這裡我們選  $\mathbf{w}_2 = (-1, 1, 0)^t$ . 最後再加入  $\mathbf{w}_3 \in \mathbb{Q}^3$  使得  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$  成為  $\mathbb{Q}^3$  的 basis, 此處我們選  $\mathbf{w}_3 = (0, 0, 1)^t$ . 此時有  $B\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1, B\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, B\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$ , 故若令  $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 則  $Q_1^{-1} \cdot B \cdot Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  為 upper triangular matrix.

另一方面因  $\mu_C(x) = (x-2)^2$ , 我們考慮  $C-2I_2$  這一個 nilpotent matrix. 因  $C-2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 我們選  $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  為  $C-2I_2$  的 basis, 再加上  $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  使得  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  為  $\mathbb{Q}^2$  的 basis. 此時  $C\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{u}_1, C\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$ , 故若令  $Q_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 則  $Q_2^{-1} \cdot C \cdot Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  為 upper triangular matrix. 最後將  $Q_1, Q_2$  合併為  $5 \times 5$  的 invertible matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

可得 upper triangular matrix

$$(P \cdot Q)^{-1} \cdot A \cdot (P \cdot Q) = Q^{-1} \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

若  $T$  是 diagonalizable, 我們可以利用對角化幫助我們求得  $T^{oi}$ . 即利用  $V$  的 eigenvectors 所形成的 ordered basis  $\beta$  得  $[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \gamma_n \end{pmatrix}$ , 故可得  $[T^{oi}]_{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma_1^i & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \gamma_n^i \end{pmatrix}$ . 當  $T$  不能化為 diagonal form 時, 我們可利用 triangular form 來幫助計算  $T^{oi}$ .

首先將  $V$  寫成  $T$ -invariant subspaces 的 direct sum  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ . 由於任意  $\mathbf{v} \in V$ , 都可以唯一寫成  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k$ , 其中  $\mathbf{v}_i \in V_i$  (Proposition 3.4.6). 對於所有的  $i = 1, \dots, k$ , 我們可定義一個 linear operator  $\pi_i: V \rightarrow V$ , 其定義為  $\pi_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_i$ . 此 linear operator 稱為 the projection to  $V_i$  with respect to the direct sum  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ . 依此定義我們知道對於所有  $\mathbf{v} \in V_i$ , 皆有  $\pi_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ . 另一方面由於  $V_i$  為  $T$ -invariant, 對於  $\mathbf{v} \in V_i$ , 我們有  $T(\mathbf{v}) \in V_i$ . 因此對於任意  $\mathbf{v} \in V$ , 將之寫成  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k$ , 其中  $\mathbf{v}_i \in V_i$ , 則  $T(\pi_i(\mathbf{v})) = T(\mathbf{v}_i)$ ,

而  $\pi_i(T(\mathbf{v})) = \pi_i(T(\mathbf{v}_1) + \cdots + T(\mathbf{v}_k)) = T(\mathbf{v}_i)$ . 得證

$$T \circ \pi_i = \pi_i \circ T, \forall i = 1, \dots, k. \quad (4.1)$$

**Theorem 4.2.7.** 假設  $V$  為 finite dimensional  $F$ -space. 若  $T: V \rightarrow V$  為 linear operator 其 minimal polynomial 為

$$\mu_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  為  $F$  中相異的元素, 則  $T = T_D + T_N$  其中  $T_D$  為 diagonalizable,  $T_N$  為 nilpotent of index  $m = \max\{m_1, \dots, m_k\}$ , 而且  $T_D \circ T_N = T_N \circ T_D$ .

**Proof.** 考慮 Primary Decomposition  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ , 其中  $V_i = \text{Ker}((T - \lambda_i \text{id})^{m_i})$ , 且令  $\pi_i: V \rightarrow V$  為 the projection to  $V_i$  with respect to the direct sum  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ . 考慮  $V$  的 linear operator  $T_D = \lambda_1 \pi_1 + \cdots + \lambda_k \pi_k$ . 因對任意  $\mathbf{v}_i \in V_i$ , 皆有  $T_D(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i$ , 所以每一組  $V_i$  的 basis, 皆由  $T_D$  的 eigenvectors 所組成. 故由  $V$  為  $V_1, \dots, V_k$  的 direct sum, 這些  $V_i$  的 basis 可組成  $V$  的 basis. 也就是說  $V$  有一組 basis 皆由  $T_D$  的 eigenvectors 所組成, 故  $T_D$  為 diagonalizable.

現令  $T_N = T - T_D$  為  $V$  的 linear operator. 因對任意  $\mathbf{v}_i \in V_i$ ,  $T_N(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i) - T_D(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{v}_i) - \lambda_i \mathbf{v}_i \in V_i$ , 知  $V_i$  皆為  $T_N$ -invariant. 又已知  $\mu_{T|_{V_i}}(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$ , 即  $m_i$  是最小的正整數使得  $(T - \lambda_i \text{id})^{m_i}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}_V, \forall \mathbf{v}_i \in V_i$ , 故知  $\mu_{T_N|_{V_i}}(x) = x^{m_i}$ . 利用 Lemma 3.5.6 知  $\mu_{T_N}(x) = \text{lcm}(x^{m_1}, \dots, x^{m_k}) = x^m$ , 其中  $m = \max\{m_1, \dots, m_k\}$ , 得證  $T_N$  為 nilpotent of index  $m$ .

最後因為

$$T_D \circ T = (\lambda_1 \pi_1 + \cdots + \lambda_k \pi_k) \circ T = \lambda_1 (\pi_1 \circ T) + \cdots + \lambda_k (\pi_k \circ T),$$

由等式 (4.1) 得

$$T \circ T_D = \lambda_1 (T \circ \pi_1) + \cdots + \lambda_k (T \circ \pi_k) = T_D \circ T.$$

因此得證

$$T_D \circ T_N = T_D \circ (T - T_D) = T_D \circ T - T_D \circ T_D = T \circ T_D - T_D \circ T_D = (T - T_D) \circ T_D = T_N \circ T_D. \quad \square$$

**Question 4.8.** 考慮 Theorem 4.2.4 中的 ordered basis  $\beta$ , 若  $[T]_\beta$  為 upper triangular matrix, 則 Theorem 4.2.7 中的  $T_D, T_N$  其對  $\beta$  的 representative matrix  $[T_D]_\beta, [T_N]_\beta$  應為何?

**Question 4.9.** 你能利用 Theorem 4.2.7, 證明若  $T$  的 minimal polynomial  $\mu_T(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中相異的 monic 一次多項式之乘積, 則  $T$  為 diagonalizable?

由 Theorem 4.2.7, 我們便能利用 triangular form 來計算  $T^{oi}$  了. 由  $T_D \circ T_N = T_N \circ T_D$ , 得

$$T^{\circ 2} = (T_D + T_N) \circ (T_D + T_N) = T_D^{\circ 2} + T_D \circ T_N + T_N \circ T_D + T_N^{\circ 2} = T_D^{\circ 2} + 2T_D \circ T_N + T_N^{\circ 2}.$$

故利用數學歸納法可得以下的二項式展開

$$T^{oi} = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} T_D^{oi-j} \circ T_N^{\circ j}.$$

由於  $T_D$  為 diagonalizable 我們很容易計算  $T_D^{\circ j}$ , 而  $T_N$  為 nilpotent of index  $m$ , 我們知道當  $j \geq m$ ,  $T_N^{\circ j} = \mathbf{O}$ . 所以這是一個幫助我們計算  $T^{\circ i}$  的方法.

最後我們來看 Theorem 4.2.7 相對應的矩陣的形式.

**Corollary 4.2.8.** 假設  $A \in M_n(F)$  且其 characteristic polynomial 和 minimal polynomial 分別為

$$\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}, \mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  為  $F$  中相異的元素. 則存在 invertible matrix  $P$  使得  $P^{-1} \cdot A \cdot P = D + N$ , 其中  $D$  為 diagonal matrix,  $N$  為 nilpotent matrix 滿足  $D \cdot N = N \cdot D$  且  $N^m = \mathbf{O}$ ,  $m = \max\{m_1, \dots, m_k\}$ .

和 linear operator 的情況相同. 當  $A$  化成 triangular form  $P^{-1} \cdot A \cdot P = D + N$ , 由於  $D \cdot N = N \cdot D$ , 我們有

$$P^{-1} \cdot A^i \cdot P = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} D^{i-j} \cdot N^j.$$

因此得到一個幫助我們計算  $A^i$  的方法.

### 4.3. Jordan Form

將矩陣化為 Triangular form 並不容易讓我們判斷兩個矩陣是否為 similar. 我們將挑選更好的 ordered basis 將其化為所謂的 Jordan form. 本節中我們仍假設  $\chi_T(x)$  可以完全分解成一次的多項式的乘積 (即  $\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}$ ). 同樣的我們先討論 nilpotent 的情形.

對於一個 linear operator  $T: V \rightarrow V$ . 這一次我們探討  $T, T^{\circ 2}, \dots$  的 kernel 間的關係. 若  $\mathbf{v} \in \text{Ker}(T^{\circ i})$ , 表示  $T^{\circ i}(\mathbf{v}) = \mathbf{O}_V$ , 故得  $T^{\circ i+1}(\mathbf{v}) = T(T^{\circ i}(\mathbf{v})) = \mathbf{O}_V$ . 所以我們自然有以下的 chain of subspaces

$$\{\mathbf{O}_V\} \subseteq \text{Ker}(T) \subseteq \text{Ker}(T^{\circ 2}) \subseteq \cdots \subseteq \text{Ker}(T^{\circ i-1}) \subseteq \text{Ker}(T^{\circ i}) \subseteq \cdots$$

特別的, 當  $T$  為 nilpotent of index  $m$ , 我們有  $\text{Ker}(T^{\circ i+1}) \neq \text{Ker}(T^{\circ i}), \forall i = 1, \dots, m-1$ .

**Lemma 4.3.1.** 假設  $\dim(V) > 0$ , 若  $T$  為 nilpotent operator of index  $m$ , 則我們有以下的 chain of subspaces.

$$\{\mathbf{O}_V\} \subsetneq \text{Ker}(T) \subsetneq \text{Ker}(T^{\circ 2}) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker}(T^{\circ i-1}) \subsetneq \text{Ker}(T^{\circ i}) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker}(T^{\circ m-1}) \subsetneq \text{Ker}(T^{\circ m}) = V.$$

**Proof.** 首先說明  $\text{Ker}(T^{\circ m-1}) \subsetneq \text{Ker}(T^{\circ m}) = V$ . 因為  $T^{\circ m} = \mathbf{O}$ , 亦即對任意  $\mathbf{v} \in V, T^{\circ m}(\mathbf{v}) = \mathbf{O}_V$ , 所以  $\text{Ker}(T^{\circ m}) = V$ . 另一方面, 若  $\text{Ker}(T^{\circ m-1}) = \text{Ker}(T^{\circ m}) = V$ , 則表示  $T^{\circ m-1} = \mathbf{O}$ , 此與  $m$  為最小的正整數使得  $T^{\circ m} = \mathbf{O}$  相矛盾, 故知  $\text{Ker}(T^{\circ m-1}) \neq \text{Ker}(T^{\circ m})$ .

接下來我們說明  $\{\mathbf{O}_V\} \subsetneq \text{Ker}(T)$ . 對任意  $\mathbf{v} \in V$  因  $\mathbf{O}_V = T^{\circ m}(\mathbf{v}) = T(T^{\circ m-1}(\mathbf{v}))$  得  $T^{\circ m-1}(\mathbf{v}) \in \text{Ker}(T)$ . 現若  $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{O}_V\}$ , 則任意  $\mathbf{v} \in V$  皆滿足  $T^{\circ m-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{O}_V$  而得到  $T^{\circ m-1} = \mathbf{O}$  之矛盾, 故知  $\text{Ker}(T) \neq \{\mathbf{O}_V\}$ .

同理, 當  $1 \leq i \leq m-2$ , 因對於所有  $\mathbf{v} \in V$  皆有  $\mathbf{O}_V = T^{om}(\mathbf{v}) = T^{oi+1}(T^{om-(i+1)}(\mathbf{v}))$ , 即  $T^{om-(i+1)}(\mathbf{v}) \in \text{Ker}(T^{oi+1})$ . 現若  $\text{Ker}(T^{oi}) = \text{Ker}(T^{oi+1})$ , 則由  $T^{om-(i+1)}(\mathbf{v}) \in \text{Ker}(T^{oi})$  得  $\mathbf{O}_V = T^{oi}(T^{om-(i+1)}(\mathbf{v})) = T^{om-1}(\mathbf{v})$ . 因為這是對任意  $\mathbf{v} \in V$  皆成立, 故得到  $T^{om-1} = \mathbf{O}$  之矛盾, 得證  $\text{Ker}(T^{oi}) \neq \text{Ker}(T^{oi+1})$ .  $\square$

現假設  $i \geq 2$ , 若  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in \text{Ker}(T^{oi+1})$  為 linearly independent 且

$$\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) \cap \text{Ker}(T^{oi}) = \{\mathbf{O}_V\},$$

則  $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_s) \in \text{Ker}(T^{oi})$  亦為 linearly independent. 事實上若

$$r_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + r_s T(\mathbf{v}_s) = \mathbf{O}_V,$$

則由  $T(r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_s \mathbf{v}_s) = \mathbf{O}_V$  得  $r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_s \mathbf{v}_s \in \text{Ker}(T) \subseteq \text{Ker}(T^{oi})$ . 故由  $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) \cap \text{Ker}(T^{oi}) = \{\mathbf{O}_V\}$  之假設得  $r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_s \mathbf{v}_s = \mathbf{O}_V$ , 再由  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$  為 linearly independent 得  $r_1 = \dots = r_s = 0$ , 得證  $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_s)$  為 linearly independent. 另外我們也可得

$$\text{Span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_s)) \cap \text{Ker}(T^{oi-1}) = \{\mathbf{O}_V\}.$$

這是因為若  $\mathbf{v} = r_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + r_s T(\mathbf{v}_s) \in \text{Ker}(T^{oi-1})$ , 則

$$\mathbf{O}_V = T^{oi-1}(r_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + r_s T(\mathbf{v}_s)) = T^{oi}(r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_s \mathbf{v}_s),$$

即  $r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_s \mathbf{v}_s \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) \cap \text{Ker}(T^{oi}) = \{\mathbf{O}_V\}$ . 再由  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$  為 linearly independent 得  $r_1 = \dots = r_s = 0$ , 得證  $\mathbf{v} = \mathbf{O}_V$ . 我們有以下之結論.

**Lemma 4.3.2.** 假設  $T: V \rightarrow V$  為 linear operator. 當  $i \geq 2$  時, 若  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in \text{Ker}(T^{oi+1})$  為 linearly independent 且  $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) \cap \text{Ker}(T^{oi}) = \{\mathbf{O}_V\}$ , 則  $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_s) \in \text{Ker}(T^{oi})$  為 linearly independent 且  $\text{Span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_s)) \cap \text{Ker}(T^{oi-1}) = \{\mathbf{O}_V\}$ .

特別地, 若  $V$  為 finite dimensional  $F$ -space, 則

$$\dim(\text{Ker}(T^{oi+1})) - \dim(\text{Ker}(T^{oi})) \leq \dim(\text{Ker}(T^{oi})) - \dim(\text{Ker}(T^{oi-1})). \quad (4.2)$$

**Proof.** 我們僅剩要證明式子 (4.2). 假設  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t\}$  為  $\text{Ker}(T^{oi-1})$  的一組 basis, 將之擴大成  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l\}$  使之為  $\text{Ker}(T^{oi})$  的一組 basis. 再擴大成  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\}$  使之為  $\text{Ker}(T^{oi+1})$  的一組 basis. 依此得  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in \text{Ker}(T^{oi+1})$  為 linearly independent 且  $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) \cap \text{Ker}(T^{oi}) = \{\mathbf{O}_V\}$ . 由前面結果知  $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_s) \in \text{Ker}(T^{oi})$  為 linearly independent 且  $\text{Span}(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_s)) \cap \text{Ker}(T^{oi-1}) = \{\mathbf{O}_V\}$ . 故  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t, T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_s)\}$  為  $\text{Ker}(T^{oi})$  中的 linearly independent set. 得知  $t+s \leq \dim(\text{Ker}(T^{oi})) = t+l$ , 亦即

$$\dim(\text{Ker}(T^{oi+1})) - \dim(\text{Ker}(T^{oi})) = s \leq l = \dim(\text{Ker}(T^{oi})) - \dim(\text{Ker}(T^{oi-1})).$$

$\square$

接下來我們先說明何謂 Jordan form, 然後再說明如何得到 Jordan form.

**Definition 4.3.3.** 給定  $\lambda \in F$ , 對於  $1 \times 1$  matrix  $(\lambda)$  以及如下形式的更高階 square matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

也就是說對角線  $(i, i)$ -th entry 為  $\lambda$ , 而對角線下方的位置即  $(i, i-1)$ -th entry 為 1, 其他位置皆為 0 的矩陣, 我們稱為 *elementary Jordan matrix* associated with  $\lambda$ . 而由 associated with  $\lambda$  的 elementary Jordan matrices 所組成的 block diagonal matrix, 即

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & J_k \end{pmatrix},$$

其中每個  $J_i$  皆為 elementary Jordan matrix associated with  $\lambda$ , 稱為 *Jordan block matrix* associated with  $\lambda$ .

注意有些書本的 elementary Jordan matrix 的定義為 1 在對角線的上方 (即  $(i, i+1)$  的位置), 不過只要將 ordered basis 順序前後對調, 不難發現這兩種矩陣為 similar.

**Question 4.10.** 假設  $T: V \rightarrow V$  為 linear operator 且  $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n)$  為  $V$  的 ordered basis. 若  $[T]_\beta$  為 elementary Jordan matrix associated with  $\lambda$ , 考慮 ordered basis  $\beta' = (\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n-1}, \dots, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$ , 則  $[T]_{\beta'}$  為何種形式的 matrix?

接下來我們說明 nilpotent linear operator 皆可找到 ordered basis 使其 representative matrix 為 Jordan block matrix associated with 0.

**Proposition 4.3.4.** 假設  $V$  為 finite dimensional  $F$ -space. 若  $T: V \rightarrow V$  是一個 nilpotent linear operator of index  $m$ , 則存在  $V$  的 ordered basis  $\beta$  使得  $[T]_\beta$  為 Jordan block matrix associated with 0.

**Proof.** 令  $S_1$  為  $\text{Ker}(T)$  的一組 basis, 將之擴大為  $\text{Ker}(T^{\circ 2})$  的一組 basis  $S_2$ , 一直下去直到得到  $S_m$  為  $\text{Ker}(T^{\circ m}) = V$  的一組 basis. 也就是說當  $i = 1, \dots, m$  時  $S_i$  為  $\text{Ker}(T^{\circ i})$  的 basis (注意 Lemma 4.3.1 告訴我們當  $i = 2, \dots, m$  時  $S_{i-1} \subsetneq S_i$ ). 現考慮  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}\} = S_m \setminus S_{m-1}$  這組 linear independent subset (它不是空集合). Corollary 1.4.4 告訴我們  $\text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}\})$  和  $\text{Span}(S_{m-1}) = \text{Ker}(T^{\circ m-1})$  的交集為  $\{\mathbf{O}_V\}$  故由 Lemma 4.3.2 知  $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_{k_1})\}$  為  $\text{Ker}(T^{\circ m-1})$  中的 linearly independent set 且  $\text{Span}(\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_{k_1})\}) \cap \text{Ker}(T^{\circ m-2}) = \{\mathbf{O}_V\}$ , 故利用 Corollary 1.4.4 知  $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_{k_1})\} \cup S_{m-2}$  為  $\text{Ker}(T^{\circ m-1})$  中的 linearly independent set. 若  $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_{k_1})\} \cup S_{m-2}$  亦為  $\text{Ker}(T^{\circ m-1})$  的 spanning set, 則它就是  $\text{Ker}(T^{\circ m-1})$  的一組 basis. 而若  $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_{k_1})\} \cup S_{m-2}$  不是  $\text{Ker}(T^{\circ m-1})$  的 spanning set, 則我們可在  $\text{Ker}(T^{\circ m-1})$  中選取  $\mathbf{v}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}$  使得

$$\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_{k_1}), \mathbf{v}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}\} \cup S_{m-2}$$

為  $\text{Ker}(T^{\circ m-1})$  中的一組 basis. 也就是說我們將集合  $S_{m-1} \setminus S_{m-2}$  用

$$\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_{k_1}), \mathbf{v}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}\}$$

取代. 注意此時  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}, T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_{k_1}), \mathbf{v}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}\} \cup S_{m-2}$  仍為  $\text{Ker}(T^{\circ m}) = V$  的一組 basis.

接下來考慮取代  $S_{m-1} \setminus S_{m-2}$  的集合  $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_{k_1}), \mathbf{v}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}\}$ . 再次利用 Lemma 4.3.2, 我們知  $\{T^{\circ 2}(\mathbf{v}_1), \dots, T^{\circ 2}(\mathbf{v}_{k_1}), T(\mathbf{v}_{k_1+1}), \dots, T(\mathbf{v}_{k_2})\} \cup S_{m-3}$  為  $\text{Ker}(T^{\circ m-2})$  中的 linearly independent set. 所以再加入  $\text{Ker}(T^{\circ m-2})$  中的元素  $\mathbf{v}_{k_2+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_3}$  使得

$$\{T^{\circ 2}(\mathbf{v}_1), \dots, T^{\circ 2}(\mathbf{v}_{k_1}), T(\mathbf{v}_{k_1+1}), \dots, T(\mathbf{v}_{k_2}), \mathbf{v}_{k_2+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_3}\} \cup S_{m-3}$$

為  $\text{Ker}(T^{\circ m-2})$  的 basis. 也就是說我們將  $S_{m-2} \setminus S_{m-3}$  集合用

$$\{T^{\circ 2}(\mathbf{v}_1), \dots, T^{\circ 2}(\mathbf{v}_{k_1}), T(\mathbf{v}_{k_1+1}), \dots, T(\mathbf{v}_{k_2}), \mathbf{v}_{k_2+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_3}\}$$

取代. 這樣一直下去, 簡單的說就是將取代  $S_{i+1} \setminus S_i$  的集合  $S'_{i+1}$  代入  $T$  得到  $T(S'_{i+1})$  這一組在  $\text{Ker}(T^{\circ i})$  的 linearly independent set, 再加入  $\text{Ker}(T^{\circ i})$  中的子集合  $S''_i$  使得  $T(S'_{i+1}) \cup S''_i \cup S_{i-1}$  為  $\text{Ker}(T^{\circ i})$  的 basis. 接著就是將  $S_i/S_{i-1}$  用  $S'_i = T(S'_{i+1}) \cup S''_i$  取代. 我們用以下圖表來表示:

$$\begin{array}{cccccccc} S_m \setminus S_{m-1} & & \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1} & & & & & \\ S_{m-1} \setminus S_{m-2} \rightsquigarrow & & T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_{k_1}), & & \mathbf{v}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2} & & & \\ S_{m-2} \setminus S_{m-3} \rightsquigarrow & & T^{\circ 2}(\mathbf{v}_1), \dots, T^{\circ 2}(\mathbf{v}_{k_1}), & & T(\mathbf{v}_{k_1+1}), \dots, T(\mathbf{v}_{k_2}), & & \mathbf{v}_{k_2+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_3} & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ S_1 \rightsquigarrow & & T^{\circ m-1}(\mathbf{v}_1), \dots, T^{\circ m-1}(\mathbf{v}_{k_1}), & & T^{\circ m-2}(\mathbf{v}_{k_1+1}), \dots, T^{\circ m-2}(\mathbf{v}_{k_2}), & & T^{\circ m-3}(\mathbf{v}_{k_2+1}), \dots, T^{\circ m-3}(\mathbf{v}_{k_3}), & \dots & T(\mathbf{v}_{k_{m-2}+1}), \dots, T(\mathbf{v}_{k_{m-1}}), & & \mathbf{v}_{k_{m-1}+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_m} \end{array}$$

最後一個步驟就是將取代  $S_2 \setminus S_1$  的元素

$$\begin{aligned} & T^{\circ m-2}(\mathbf{v}_1), \dots, T^{\circ m-2}(\mathbf{v}_{k_1}), T^{\circ m-3}(\mathbf{v}_{k_1+1}), \dots, T^{\circ m-3}(\mathbf{v}_{k_2}), \dots, \\ & T(\mathbf{v}_{k_{m-3}+1}), \dots, T(\mathbf{v}_{k_{m-2}}), \mathbf{v}_{k_{m-2}+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_{m-1}} \end{aligned}$$

代入  $T$ , 得到  $\text{Ker}(T)$  中的 linearly independent set

$$\begin{aligned} & \{T^{\circ m-1}(\mathbf{v}_1), \dots, T^{\circ m-1}(\mathbf{v}_{k_1}), T^{\circ m-2}(\mathbf{v}_{k_1+1}), \dots, T^{\circ m-2}(\mathbf{v}_{k_2}), \dots, \\ & T^{\circ 2}(\mathbf{v}_{k_{m-3}+1}), \dots, T^{\circ 2}(\mathbf{v}_{k_{m-2}}), T(\mathbf{v}_{k_{m-2}+1}), \dots, T(\mathbf{v}_{k_{m-1}})\} \end{aligned}$$

再加入  $\text{Ker}(T)$  中的元素  $\mathbf{v}_{k_{m-1}+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_m}$  使其成為  $\text{Ker}(T)$  的 basis. 所以上面圖表的最後一個 row 的元素就是取代  $S_1$  的元素, 即  $\text{Ker}(T)$  的 basis. 將之與取代  $S_2 \setminus S_1$  的集合聯集就是取代  $S_2$  的元素, 即  $\text{Ker}(T^{\circ 2})$  的 basis. 同理圖表中取代  $S_i \setminus S_{i-1}$  的那一個 row 及其以下各 row 的元素即為組成  $\text{Ker}(T^{\circ i})$  的 basis. 也因此上表中的各元素即組成  $V = \text{Ker}(T^{\circ m})$  的 basis. 考慮將它們按順序一個 column 一個 column 由上往下排序所形成的 ordered basis  $\beta$ , 即  $\beta$  的第一個元素為  $\mathbf{v}_1$  接著為  $T(\mathbf{v}_1)$ , 一直到第  $m$  個為  $T^{\circ m-1}(\mathbf{v}_1)$  接著放  $\mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_2), \dots$  這樣一直下去最後依序為  $\mathbf{v}_{k_{m-1}}, T(\mathbf{v}_{k_{m-1}}), \mathbf{v}_{k_{m-1}+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_m}$ . 很容易看出  $[T]_\beta$  便是一個 Jordan

block matrix associated with 0. 例如  $[T]_\beta$  對應  $(\mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_1), \dots, T^{m-1}(\mathbf{v}_1))$  的部分的 block 就是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

這一個 associated with 0 的  $m \times m$  階 elementary Jordan matrix.  $\square$

**Question 4.11.** 在上面證明中  $[T]_\beta$  對應  $(\mathbf{v}_{k_1+1}, T(\mathbf{v}_{k_1+1}), \dots, T^{m-2}(\mathbf{v}_1))$  的部分的 block 是幾階的 elementary Jordan matrix? 對應到  $(\mathbf{v}_{k_{m-1}}, T(\mathbf{v}_{k_{m-1}}))$  和  $(\mathbf{v}_{k_{m-1}+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_m})$  部分又是怎樣的 matrices?

**Example 4.3.5.** 考慮 linear operator  $T: P_4(\mathbb{R}) \rightarrow P_4(\mathbb{R})$  定義為  $T(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = 4ax^2 + 3bx + 2c$ , 很容易判斷  $T$  為 nilpotent of index 3. 因  $\text{Ker}(T) = \{dx + e \mid d, e \in \mathbb{R}\}$ , 我們找到  $\text{Ker}(T)$  的一組 basis  $S_1 = \{x, 1\}$ . 而  $\text{Ker}(T^{\circ 2}) = \{bx^3 + cx^2 + dx + e \mid b, c, d, e \in \mathbb{R}\}$ , 我們將  $S_1$  擴大為  $S_2 = \{x^3, x^2, x, 1\}$  成為  $\text{Ker}(T^{\circ 2})$  的 basis. 最後將  $S_2$  擴大為  $S_3 = \{x^4, x^3, x^2, x, 1\}$  使其為  $\text{Ker}(T^{\circ 3}) = V$  的 basis.

現  $S_3 \setminus S_2 = \{x^4\}$ , 故考慮  $T(x^4) = 4x^2$ . 其與  $S_1$  的聯集  $\{4x^2, x, 1\}$  為  $\text{Ker}(T^{\circ 2})$  上的 linearly independent set, 可加入  $x^3$  使得  $\{4x^2, x^3\} \cup S_1 = \{4x^2, x^3, x, 1\}$  為  $\text{Ker}(T^{\circ 2})$  的 basis. 此時用  $\{4x^2, x^3\}$  取代  $S_2 \setminus S_1 = \{x^3, x^2\}$ . 接著考慮  $T(4x^2) = 8, T(x^3) = 3x$ , 因為  $\{8, 3x\}$  已為  $\text{Ker}(T)$  的 basis 所以不需加入元素直接用  $\{8, 3x\}$  取代  $S_1$ . 我們有以下之圖表:

$$\begin{array}{l} S_3 \setminus S_2 = \{x^4\} \\ S_2 \setminus S_1 = \{x^3, x^2\} \\ S_1 = \{x, 1\} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x^4 \\ T(x^4) = 4x^2, \\ T(T(x^4)) = 8, \end{array} \quad \begin{array}{l} x^3 \\ T(x^3) = 3x \end{array}$$

所以考慮 ordered basis  $\beta = (x^4, 4x^2, 8, x^3, 3x)$ , 我們得到

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

其實在 Example 4.3.5, 我們不必真的找到 ordered basis 便能判斷  $T$  的 Jordan form 的可能形式. 利用 Proposition 4.3.4 的證明中所用的圖表, 我們知道 Jordan block matrix 中的 elementary Jordan matrix 的個數就是圖表中 column 的個數, 而 column 的個數就是圖表中最後一個 row 的元素個數, 即  $\#(S_1) = \dim(\text{Ker}(T))$ . 另外每一個 column 的元素個數就是它所對應的 elementary Jordan matrix 的階數. 例如第一個 column 就是來自  $S_m \setminus S_{m-1}$  的元素  $\mathbf{v}_1$ , 接著為  $T(\mathbf{v}_1), \dots, T^{m-1}(\mathbf{v}_1)$  共  $m$  個元素, 它所對應的就是一個  $m \times m$  階的 elementary Jordan matrix. 這些  $m \times m$  階的 elementary Jordan matrices 的個數就是那些有  $m$  個元素的 column 的個數, 由圖表中我們可以知道他們的個數就是  $k_1$ , 即  $S_m \setminus S_{m-1}$  的元素個

數, 也就是  $\dim(\text{Ker}(T^{om})) - \dim(\text{Ker}(T^{om-1}))$ . 由 Lemma 4.3.1, 我們知此數必大於 0. 至於  $(m-1) \times (m-1)$  階的 elementary Jordan matrices 的個數, 就是 Proposition 4.3.4 中的  $k_2 - k_1$ , 即  $\dim(\text{Ker}(T^{om-1})) - \dim(\text{Ker}(T^{om-2})) - (\dim(\text{Ker}(T^{om})) - \dim(\text{Ker}(T^{om-1})))$ , 此數有可能為 0 (Lemma 4.2 僅告訴我們它大於等於 0). 同理,  $i \times i$  階的 elementary Jordan matrices 的個數為  $\dim(\text{Ker}(T^{oi})) - \dim(\text{Ker}(T^{oi-1})) - (\dim(\text{Ker}(T^{oi+1})) - \dim(\text{Ker}(T^{oi})))$ .

在 Example 4.3.5 中的  $T$  為 nilpotent of index 3, 故其 Jordan block matrix 中一定有  $3 \times 3$  階的 elementary Jordan matrix. 但  $\dim(V) = 5$ , 故僅能有一個 (否則 Jordan block matrix 的階數會大於等於  $6 \times 6$ ). 所以剩下可能是僅有一個  $2 \times 2$  階的 elementary Jordan matrix, 或是有兩個  $1 \times 1$  階的 elementary Jordan matrix. 不過  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$ , 所以僅能有 2 個 elementary Jordan matrices, 因此排除後者. 知  $T$  化成的 Jordan block matrix 一定是由一個  $3 \times 3$  階和一個  $2 \times 2$  階的 elementary Jordan matrices 所組成.

現在我們回到  $T$  的 minimal polynomial 為  $\mu_T(x) = (x - \lambda)^m$  的情形, 此時  $T - \lambda \text{id}$  為 nilpotent 所以由 Proposition 4.3.4 知存在 ordered basis  $\beta$  使得  $[T - \lambda \text{id}]_\beta = J$  為一個 diagonal 皆為 0 的 Jordan block matrix  $J$ . 然而若  $\dim(V) = n$ , 因  $[T - \lambda \text{id}]_\beta = [T]_\beta - \lambda I_n$ , 故得  $[T]_\beta = \lambda I_n + J$ , 為一個 diagonal 皆為  $\lambda$  的 Jordan block matrix.

**Theorem 4.3.6.** 假設  $V$  為 finite dimensional  $F$ -space. 若  $T: V \rightarrow V$  為 linear operator 其 characteristic polynomial 和 minimal polynomial 分別為

$$\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}, \mu_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  為  $F$  中相異的元素, 則存在  $V$  的 ordered basis  $\beta$  使得

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} J_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & J_k \end{pmatrix},$$

其中每個  $J_i$  為  $c_i \times c_i$  階的 Jordan block matrix associated with  $\lambda_i$ , 而且組成  $J_i$  的 elementary Jordan matrices 的個數就是  $\lambda_i$  的 geometric multiplicity, 即  $\dim(\text{Ker}(T - \lambda_i \text{id}))$ . 另外  $J_i$  中最高階的 elementary Jordan matrix 為  $m_i \times m_i$  階.

**Proof.** 由 Primary Decomposition Theorem 得  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ , 其中  $V_i = \text{Ker}((T - \lambda_i \text{id})^{om_i})$  且  $\mu_{T|_{V_i}}(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$ . 得  $T|_{V_i} - \lambda_i \text{id}|_{V_i}$  為 nilpotent, 故利用 Proposition 4.3.4, 我們知存在  $\beta_i$  為  $V_i$  的 ordered basis, 使得  $[T|_{V_i}]_{\beta_i}$  為  $J_i$  這樣的  $c_i \times c_i$  階的 Jordan block matrix associated with  $\lambda_i$ . 故將  $\beta_1, \dots, \beta_k$  依序排列形成  $V$  的 ordered basis  $\beta$ , 可得  $[T]_\beta$  為所要的 Jordan matrix.  $\square$

**Question 4.12.** 你能利用 Theorem 4.3.6, 證明若  $T$  的 characteristic polynomial  $\chi_T(x)$  可以完全分解成  $F[x]$  中的一次多項式之乘積, 且  $T$  的每一個 eigenvalue 的 algebraic multiplicity 等於其 geometric multiplicity, 則  $T$  為 diagonalizable?

在 Theorem 4.3.6 中  $T$  的 representative matrix 就稱為  $T$  的 *Jordan form*. 前面提過有些情況我們可以用  $\chi_T(x), \mu_T(x)$  來得到  $T$  的 Jordan form, 不過有時並不盡然, 我們用以下了例子來探討.

**Example 4.3.7.** 假設  $T: V \rightarrow V$  為 linear operator 且  $\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^3(x - \lambda_2)^4$ , 其中  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . 我們來探討  $T$  的 Jordan form 可能的形式. 首先由  $\deg(\chi_T(x)) = 7$ , 知  $\dim(V) = 7$ , 所以  $T$  的 Jordan form 一定是  $7 \times 7$  matrix. 另外因  $\chi_T(x)$  有兩個相異的一次因式, 所以它的 Jordan form, 一定是有兩個 Jordan block matrix 所組成, 其中一個是  $3 \times 3$  且 associated with  $\lambda_1$ , 另一個是  $4 \times 4$  且 associated with  $\lambda_2$ . 現在問題是這兩個 Jordan block matrix 是由哪些 elementary Jordan matrix 所組成.

首先看  $3 \times 3$  的 block Jordan matrix associated with  $\lambda_1$  的可能情況. 若  $\mu_T(x)$  可被  $(x - \lambda_1)^3$  整除, 則由 Theorem 4.3.6 知此 block 中一定有一個  $3 \times 3$  的 elementary Jordan matrix, 所以此時這一個 Jordan block 就是一個  $3 \times 3$  的 elementary Jordan matrix. 若  $\mu_T(x)$  僅可被  $(x - \lambda_1)^2$  整除, 不能被  $(x - \lambda_1)^3$  整除, 則同樣由 Theorem 4.3.6 知此 block 中一定有一個  $2 \times 2$  的 elementary Jordan matrix, 但此 block 為  $3 \times 3$  matrix, 所以應該還有一個  $1 \times 1$  的 elementary Jordan matrix. 所以這種情形這個 block 是由一個  $2 \times 2$  和一個  $1 \times 1$  matrix 所組成. 最後若  $(x - \lambda_1) \mid \mu_T(x)$  但  $(x - \lambda_1)^2 \nmid \mu_T(x)$ , 可知此 block 是由 3 個  $1 \times 1$  的 elementary Jordan matrix 所組成. 我們將結果列為下表

$x - \lambda_1$ 的次數	3	2	1
block Jordan matrix	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

所以 Jordan block matrix associated with  $\lambda_1$  皆可由  $\mu_T(x)$  確定.

至於  $4 \times 4$  的 block Jordan matrix associated with  $\lambda_2$  的可能情況, 在  $x - \lambda_2$  可整除  $\mu_T(x)$  的最高次數為 4, 3, 1 時, 和前面一樣的, 此時組成此 block 的 elementary Jordan matrix 是可以被確定的. 我們列出下表:

$x - \lambda_2$ 的次數	4	3	1
block Jordan matrix	$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

若  $x - \lambda_2$  可整除  $\mu_T(x)$  的最高次數為 2 時, 此時 associated with  $\lambda_2$  的  $4 \times 4$  的 block Jordan matrix 中雖知一定有一個  $2 \times 2$  的 elementary Jordan matrix, 但其他的部分有可能是一個  $2 \times 2$  的 elementary Jordan matrix 或是有兩個  $1 \times 1$  的 elementary Jordan matrices 所組成. 也就是說此時這一個 block 有可能是以下兩種情況:

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

當然了就得利用  $\lambda_2$  的 geometric multiplicity (即  $\dim(\text{Ker}(T - \lambda_2 \text{id}))$ ) 來判斷了. 若 geometric multiplicity 為 2 則 block Jordan matrix 為前者 (即由兩個  $2 \times 2$  elementary Jordan

matrices 所組成), 而 geometric multiplicity 為 3 時就是後者 (即由一個  $2 \times 2$  和兩個  $1 \times 1$  elementary Jordan matrices 所組成).

將兩個 Jordan block matrices 確定後, 我們就能決定  $T$  的 Jordan form 了, 例如當  $\mu_T(x) = (x - \lambda_1)^2(x - \lambda_2)^3$  的情形  $T$  的 Jordan form 就可確定為

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

而若  $\mu_T(x) = (x - \lambda_1)^2(x - \lambda_2)^2$  時  $T$  的 Jordan form 就有兩種可能, 當  $\lambda_2$  的 geometric multiplicity 為 2 和 3 時,  $T$  的 Jordan form 分別為

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

**Question 4.13.** 在 Example 4.3.7 中  $\chi_T(x) = (x - \lambda_1)^3(x - \lambda_2)^4$ . 當  $\mu_T(x) = (x - \lambda_1)^2(x - \lambda_2)^2$  時,  $\lambda_2$  的 geometric multiplicity 為什麼不可能是 1 或 4 呢? 又此時能確定  $\lambda_1$  的 geometric multiplicity 嗎?

對於  $n \times n$  的矩陣我們也有相對應的定理, 也就是說若  $A \in M_n(F)$  其 characteristic polynomial 可以完全分解成  $F[x]$  中的一次多項式乘積  $\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{c_1} \cdots (x - \lambda_k)^{c_k}$ , 則存在 invertible matrix  $P \in M_n(F)$  使得

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} J_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J_k \end{pmatrix},$$

其中每個  $J_i$  為  $c_i \times c_i$  階的 Jordan block matrix associated with  $\lambda_i$ . 這個 matrix 我們稱為  $A$  的 Jordan form.

我們說明如何找到 invertible matrix  $P$  使得  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  為 Jordan form. 首先注意我們不必如得到 triangular form 的情形先把  $A$  化為 block diagonal matrix. 這是因為若  $\mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$ , 利用 Proposition 4.3.4 的方法, 對於每一個  $i = 1, \dots, k$ , 我們必須找到一組  $(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$  的 null space  $N((A - \lambda_i I_n)^{m_i})$  的 basis (此即相對於 Proposition 4.3.4 中  $\text{Ker}(T^m)$  的 basis), 而  $N((A - \lambda_i I_n)^{m_i})$  剛好是 primary decomposition 中所考慮的 invariant subspace, 所以我們不必重複做變換 basis 的動作. 要找到  $P$  的步驟如下: 對於每一個  $i = 1, \dots, k$ , 先找到  $N(A - \lambda_i I_n)$  的 basis  $S_1$ , 再將之擴大成  $S_2$  使之成為  $N((A - \lambda_i)^2)$  的 basis. 這樣一直下去直到得到  $N((A - \lambda_i)^{m_i})$  的 basis  $S_{m_i}$ . 接下來令  $S_{m_i} \setminus S_{m_i-1} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k_1}\}$ ,

然後得  $\{A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_{k_1}\}$ . 將之擴大成  $\{A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{k_2}\}$  使之與  $S_{m_i-2}$  的聯集成為  $N((A - \lambda_i)^{m_i-1})$  的 basis 並取代  $S_{m_i-1} \setminus S_{m_i-2}$ . 這樣一直下去直到將  $S_2 \setminus S_1$  取代完畢. 最後依 Proposition 4.3.4 將這些 bases 排序得到  $P$ . 我們看以下的例子.

**Example 4.3.8.** 考慮  $5 \times 5$  matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

雖然在 Example 3.5.10 中我們找到 invertible matrix  $P$  使得  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  為 block diagonal matrix, 接著在 Example 4.2.6 中我們又找到 invertible matrix  $Q$  使得  $(P \cdot Q)^{-1} \cdot A \cdot (P \cdot Q)$  為 upper triangular matrix. 不過要將  $A$  化為 Jordan form 就不必先將  $A$  化為 block diagonal matrix 再化為 Jordan form 這麼麻煩, 我們直接用 Proposition 4.3.4 的方法處理.

因  $\chi_A(x) = \mu_A(x) = (x-1)^3(x-2)^2$ , 首先觀察  $A - I_5$  的 null space 為 dimension 1, 我們得  $S_1 = \{(0, 0, -1, 1, 0)^t\}$  為其 basis. 接著擴大成  $S_2 = \{(0, 0, -1, 1, 0)^t, (1, 0, -1, 0, 1)^t\}$  為  $(A - I_5)^2$  的 null space 的 basis. 然後擴大成  $S_3 = \{(0, 0, -1, 1, 0)^t, (1, 0, -1, 0, 1)^t, (-1, 0, 0, 0, 1)^t\}$  為  $(A - I_5)^3$  的 null space 的 basis. 因為  $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 0, 0, 1)^t \in S_3 \setminus S_2$ , 我們考慮  $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 = (-1, 0, 0, 1, -1)^t$ , 且將之取代  $S_2 \setminus S_1$  的元素. 最後得  $\mathbf{v}_3 = A\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, -1, 0)$  取代  $S_1$  的元素. 此時我們有  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  為  $(A - I_5)^3$  的 null space 的 basis 且

$$A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, A\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3.$$

同樣的我們有  $S'_1 = \{(0, -1, 1, 0, 0)^t\}$  為  $A - 2I_5$  的 null space 的 basis. 將之擴大為  $S'_2 = \{(0, -1, 1, 0, 0)^t, (1, 0, 0, 0, 0)\}$  為  $(A - 2I_5)^2$  的 null space 的 basis. 故考慮  $\mathbf{v}'_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$  並用  $\mathbf{v}'_2 = A\mathbf{v}'_1 - 2\mathbf{v}'_1 = (0, 1, -1, 0, 0)^t$  取代  $(0, -1, 1, 0, 0)^t$ . 此時我們有  $\{b\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2\}$  為  $(A - 2I_5)^2$  的 null space 的 basis 且

$$A\mathbf{v}'_1 = 2\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2, A\mathbf{v}'_2 = 2\mathbf{v}'_2.$$

最後令

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{得} \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

在前面 Section 4.1, 我們提到當  $A, B \in M_n(F)$  為 diagonalizable 時, 我們可以將其對角線位置的 eigenvalue 適當的重排來判斷  $A, B$  是否為 similar. 同樣的若  $A, B$  的 characteristic polynomial 在  $F[x]$  可完全分解成一次的 monic polynomials 的乘積, 我們可以將  $A, B$  化為 Jordan form 來判斷它們是否為 similar. 當然了先決條件是  $\chi_A(x) = \chi_B(x)$  且  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ . 若其中有一個不相等便可知  $A, B$  不為 similar, 而若皆相等就需藉由  $A, B$  的 Jordan form 來確定. 對於  $A, B$  的每一個 eigenvalue, 若將  $A, B$  對於 associated with  $\lambda$  的 block Jordan matrix 中的 elementary Jordan matrices 做適當重排後會相同, 則知  $A \sim B$ . 反之, 若  $A \sim B$ ,

我們可將  $A, B$  視為某一個 linear operator  $T$  用不同 ordered bases 所得的 representative matrices. 由於 associated  $\lambda$  的 elementary Jordan matrices 的各個階數的個數告訴我們

$$\dots, \dim(\text{Ker}((T - \lambda \text{id})^{o_{i-1}})), \dim(\text{Ker}((T - \lambda \text{id})^{o_i})), \dim(\text{Ker}((T - \lambda \text{id})^{o_{i+1}})), \dots$$

這些 dimensions 之間的關係, 而這些關係和 ordered basis 的選取無關, 所以  $A, B$  associated  $\lambda$  的 elementary Jordan matrices 的各個階數的個數會相同, 也就是  $A, B$  可以化為相同的 Jordan form. 因為 Jordan form 可以用來判定兩個 matrixes 是否為 similar, 所以 Jordan form 可以視為一種 canonical form.

最後我們談論 Jordan form 一個重要的應用. 回顧一下, 若  $A \in M_n(F)$  則  $A$  和  $A$  的 transpose  $A^t$  有相同的 characteristic polynomial 和 minimal polynomial. 這表示  $A$  和  $A^t$  有可能為 similar. 事實上當  $\chi_A(x)$  可以在  $F[x]$  中完全分解成一次的 monic polynomials 的乘積, 我們可得  $A \sim A^t$ . 這是因為當  $A \in M_n(F)$  時,  $\dim(N(A)) + \dim(C(A)) = n$ . 又因為  $\dim(C(A)) = \dim(C(A^t))$ , 所以我們得  $\dim(N(A)) = \dim(N(A^t))$ . 同理, 對於每一個  $A$  的 eigenvalue  $\lambda$  (也會是  $A^t$  的 eigenvalue), 我們有

$$\dim(N((A - \lambda I_n)^i)) = \dim(N(((A - \lambda I_n)^t)^i)) = \dim(N((A^t - \lambda I_n)^i)).$$

所以將  $A$  化為 Jordan form, 每一個階數的 elementary Jordan matrix associated with  $\lambda$  和  $A^t$  同階的 elementary Jordan matrix associated with  $\lambda$  個數都相同, 也就是說  $A$  和  $A^t$  可以化成同樣的 Jordan form. 我們有以下之結果.

**Theorem 4.3.9.** 假設  $A \in M_n(F)$ . 若  $\chi_A(x)$  可以在  $F[x]$  中完全分解成一次的 monic polynomials 的乘積, 則  $A$  的 transpose  $A^t$  和  $A$  為 similar.

以後我們會提到若  $A, B \in M_n(F)$  且存在一個比  $F$  大的 field  $\tilde{F}$  使得在  $M_n(\tilde{F})$  中  $A \sim B$  (即存在  $\tilde{P} \in M_n(\tilde{F})$  invertible 使得  $B = \tilde{P}^{-1} \cdot A \cdot \tilde{P}$ ), 則在  $M_n(F)$  中  $A \sim B$  (即存在  $P \in M_n(F)$  invertible 使得  $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ ). 所以事實上 Theorem 4.3.9 不需  $\chi_A(x)$  可以在  $F[x]$  中完全分解成一次的 monic polynomials 的乘積之假設, 我們仍可得  $A \sim A^t$ .

## 第一學期結束