*Chapter 1*

# 極限以及連續性

本課程探討的是定義在實數且取值為實數的函數。函數的極限是學習微積分最重要的基本概念。在本章中，我們先介紹數列的極限進而介紹函數極限的基本概念，再利用極限的概念介紹何謂連續函數。接著，介紹一些求極值的方法以及連續函數的性質。

## 1.1. 數列的極限

要談數列（sequence）的極限（limit）談的是有無限多項的數列（infinite sequence）其長期變化的趨勢。這裡，為了方便起見我們談的數列都有起始項，且項數是增加的。這裡我們不要求對極限性質的證明，而強調對這些性質的理解與運用，所以不會論及數列的極限在數學上嚴格的定義。

當不論及正式的定義，課本 Definition 2.1.1 說一個數列 $\langle a_n\rangle$ 的極限為 $L$，指的是當 $n$ 夠大時，都會使得 $a_n$ 任意接近 $L$，並用符號 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$（或 $a_n \to L$ as $n \to \infty$）表示之。這裡要注意的是 $L$ 必須是一個實數；而當 $n$ 夠大時，都會使得 $a_n$ 任意接近 $L$ 說的是任選一個包含 $L$ 的開區間（例如 $(L-0.001, L+0.001)$）都可以找到 $N$ 使得當 $n \geq N$ 時，$a_n$（即第 $N$ 項以後）都會落在這區間內。

當一個數列極限存在且極限值為 $L$ 時（即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$）我們稱此數列收斂到 $L$（converges to $L$），而若不強調其極限值僅強調其極限存在（有時極限值不好求，我們僅關心其極限存在），便稱此數列收斂（converges 或 is convergent）。反之，當一個數列極限不存在時，我們便稱此數列發散（diverges 或 is divergent）。

**Example 1.1.1.** 課本 Example 2.1.1 舉了 $a_n = \dfrac{1}{n}$ 和 $b_n = (-1)^n$ 這兩個例子。取夠多的 $n$ 後我們可推測 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$；而 $b_n$ 在 $1, -1$ 間跳動沒有極限，所以 $b_n$ diverges。由於計算機的取值有效位數有限制，有時光代值看趨勢判斷極限值會有問題，所以正確的方式就是利用定義證明。例如對於數列 $\langle a_n\rangle$，選取包含 $0$ 的任意區間，對於夠大的 $n$，$a_n$ 都會落在這區間內。例如考慮區間 $(-0.01, 0.01)$，當 $n > 100$ 時，都會有 $0 < a_n < 0.01$（即 $a_n \in (-0.01, 0.01)$）。數學上就是以此方法證明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。論證一個數列收斂或發散有時相當困難，只要大家理解基本概念，在此課程不會要求。

**注意：**許多人會說 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 表示當 $n$ 越來越大時 $a_n$ 會越靠近 $L$，不過這樣的說法容易讓人誤解。例如考慮 $a_n = \begin{cases} 1/n, & \text{當 } n \text{ 為奇數;} \\ 2/n, & \text{當 } n \text{ 為偶數.} \end{cases}$ 這個數列是以忽遠忽近的方式接近 0。例如 $a_{100} = 1/50, a_{101} = 1/101, a_{102} = 1/51$，並沒有越來越靠近 0。不過選取包含 0 的任意區間，對於夠大的 $n$，$a_n$ 都會落在這區間內。例如考慮區間 $(-0.01, 0.01)$，當 $n > 200$ 時，都會有 $-0.01 < a_n < 0.01$（即 $a_n \in (-0.01, 0.01)$）。所以我們仍然有 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$ ♯

由於我們關心的是數列長期變化的趨勢，對於發散的數列我們又區分成兩種情況。一種情況是數列 $a_n$ 對於任意的（正）實數 $M$ 都可以找到 $N$ 使得當 $n \geq N$ 時，$a_n$ 都會大於 $M$；或是對於任意的（負）實數 $M$ 都可以找到 $N$ 使得當 $n \geq N$ 時，$a_n$ 都會小於 $M$。此時我們分別用符號 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 和 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 表示，且分別說 $a_n$ 發散到無窮大（diverges to infinity）和發散到負無窮大。例如課本 Example 2.1.2 中 $a_n = \sqrt{n}$ 就發散到無窮大。其他的情況，我們就直接說數列發散，也不會用 lim 的符號表示。例如課本 Example 2.1.1 $b_n = (-1)^n$ 因為不會收斂到任何的值，所以發散，但又是有界的所以不會發散到無窮大。

一般來說，要了解一個數列收斂或發散並不容易，而若收斂要知道其極限為何更是困難。以後學了微積分，我們可以利用一些技巧處理。以下介紹的一些有關數列極限的基本性質，基本上是告訴我們如何運用一些已知數列的極限求得其他相關數列的極限。

**Theorem 1.1.2.** 假設 $\langle a_n\rangle, \langle b_n\rangle$ 均為收斂的數列且 $\lim_{n\to\infty} a_n = A, \lim_{n\to\infty} b_n = B$。則以下數列一定收斂且可求其極限值。

(1) 考慮數列 $\langle s_n\rangle$ 其中 $s_n = a_n + b_n$，則 $\lim_{n\to\infty} s_n = A + B$。

(2) 考慮數列 $\langle p_n\rangle$ 其中 $p_n = a_n b_n$，則 $\lim_{n\to\infty} p_n = AB$。

(3) 假設對所有 $n$ 皆有 $b_n \neq 0$ 且 $B \neq 0$。考慮數列 $\langle q_n\rangle$ 其中 $q_n = \dfrac{a_n}{b_n}$，則 $\lim_{n\to\infty} q_n = \dfrac{A}{B}$。

這個定理可以用極限定義方式證明，我們只要了解其意義，證明就略過了。請注意要使用此定理的先決條件是兩個數列都是收斂的。也要注意 (3) 要求 $b_n$ 皆不為 0，否則 $q_n$ 會無法定義。另外，即使 $b_n$ 皆不為 0，仍有可能 $\lim_{n\to\infty} b_n = B = 0$（例如 $b_n = 1/n$ 的情況），所以我們也要排除 $B = 0$ 的情況。

課本 P.97 所列的 Limit Laws for Sequence 和這裡的 Theorem 1.1.2 是一樣的（只是寫法不同）希望同學能理解，雖然我們列的性質比較少，可是課本所列的性質有些部分是可以用這裡的 Theorem 1.1.2 來推導。例如當 $c$ 是一個常數，我們可以將之看成是一個常數數列 $\langle b_n\rangle$，也就是說每一項 $b_n$ 都等於 $c$，所以我們有 $\lim_{n\to\infty} b_n = c$。也因此數列 $\langle ca_n\rangle$ 就可視為數列 $\langle b_n a_n\rangle$，此時就可套用 Theorem 1.1.2(2) 得到

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{1.1}$$

同樣的道理，對於給定的實數 $r, s$ 如果數列 $\langle a_n\rangle, \langle b_n\rangle$ 均為收斂，我們也可利用式子 (1.1) 以及 Theorem 1.1.2(1) 推得

$$\lim_{n\to\infty} (ra_n + sb_n) = r \lim_{n\to\infty} a_n + s \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{1.2}$$

**Example 1.1.3.** 考慮數列 $\langle a_n\rangle$ 其中 $a_n = 2+\dfrac{3}{n^2}$。由於 $\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，所以利用極限乘法性質（Theorem 1.1.2(2)），可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ 又因為常數數列 2 是收斂的，所以由式子 (1.2) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2+3\times 0 = 2$。 $\sharp$

另外當 $b_n = a_n$ 時，數列 $\langle a_nb_n\rangle$ 和 $\langle a_n^2\rangle$ 是一樣的數列，所以同樣利用 Theorem 1.1.2(2) 我們也可推得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^2$。同理，這也可推到更高次方，也就是說對任意的正整數 $k\in\mathbb{N}$，我們也會有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k$。這對於負整數 $-k$ 也成立嗎？由於 $a_n^{-k}=\dfrac{1}{a_n^k}$，所以由 Theorem 1.1.2(3) 我們知當 $-k$ 為負整數時，只有當 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 時才能確保 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-k} = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^{-k}$。其實，這個性質不只對整數次方成立，對任意的實數次方也成立，所以我們有以下的定理。

**Theorem 1.1.4.** 給定實數 $r$，假設 $\langle a_n\rangle$ 為收斂的數列且 $a_n^r$ 皆有定義。若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A\neq 0$，則我們有

$$\lim_{n\to\infty} a_n^r = (\lim_{n\to\infty} a_n)^r = A^r.$$

又若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，則當 $r>0$ 時 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^r = 0$；而當 $r<0$ 時數列 $\langle a_n^r\rangle$ 發散。

這裡要提醒一下對於非整數次方 $r$，必需 $a_n>0$ 才能確保 $a_n^r$ 有定義。

再次強調這裡所述的性質的先決條件是數列必需收斂，也就是說若有其中一個數列發散就不適用。不過，當其中有一個收斂，另一個發散，我們依然可以利用前面的性質以及反證法得到一些有趣的結論。比方說若已知 $\langle a_n\rangle$ 收斂、$\langle b_n\rangle$ 發散，我們就可證得 $\langle a_n+b_n\rangle$ 發散。所謂反證法就是假設 $c_n = a_n+b_n$ 是收斂的，然後利用已知的結果得到矛盾。這就表示 $\langle c_n\rangle$ 是收斂的這個假設是錯的，因此得證 $\langle a_n+b_n\rangle$ 發散。事實上由於 $b_n = c_n - a_n$，而我們又已知 $\langle a_n\rangle$ 收斂，所以如果 $\langle c_n\rangle$ 是收斂的，而前面所提性質說 $b_n = c_n - a_n$ 會收斂，導致與已知 $b_n$ 發散相矛盾。

同樣的想法，如果已知 $\langle a_n\rangle$ 收斂、$\langle b_n\rangle$ 發散能否推導出 $\langle a_nb_n\rangle$ 發散呢？我們依樣畫葫蘆，考慮 $c_n = a_nb_n$，並假設 $\langle c_n\rangle$ 收斂，此時由於 $b_n = c_n/a_n$，如果 $\langle a_n\rangle$ 不是收斂到 0，前面 Theorem 1.1.2(3) 告訴我們 $\langle b_n\rangle$ 會收斂，這就造成矛盾了。所以在 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$ 的情況下，我們可以保證 $\langle a_nb_n\rangle$ 發散。我們把這些結果寫成以下引理（Corollary）。

**Corollary 1.1.5.** 假設數列 $\langle a_n\rangle$ 收斂且數列 $\langle b_n\rangle$ 發散。我們有以下結果：

(1) 數列 $\langle a_n+b_n\rangle$ 發散。

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$ 則數列 $\langle a_nb_n\rangle$ 發散。

當兩個數列都是發散，它們之間加減乘除後所得的數列收斂或發散的情況都有可能發生，一般就說這類的極限問題是不定型（Indeterminate form）。我們先看課本 Example 2.1.3 所考慮的數列極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n^2}{5+3n+4n^2}$。由於分子、分母都發散（趨近於無限大），所以是不定型，無法用前面極限性質決定其收斂或發散。不過若上下同除以 $n^2$，原數列並未改

變，亦即

$$\frac{1+2n^2}{5+3n+4n^2}=\frac{\dfrac{1+2n^2}{n^2}}{\dfrac{5+3n+4n^2}{n^2}}=\frac{\dfrac{1}{n^2}+2}{\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{3}{n}+4}.$$

這個新的表示法，分子趨近於 2、分母趨近於 4，所以可以套用極限的性質（Theorem 1.1.2(3)），得到原數列的極限值為 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。

**Excecise 1.1.** 假設數列 $\langle a_n\rangle$ 發散且數列 $\langle b_n\rangle$ 收斂。考慮 $c_n=\frac{a_n}{b_n}$。試利用反證法證明數列 $\langle c_n\rangle$ 發散。

**Excecise 1.2.** 上面所提課本 Example 2.1.3 這種不定型的問題其實都可以將分子、分母除以分母的最高次來處理。試用此法說明以下數列是收斂還是發散。

(1) $\langle\frac{1+2n^2}{5+3n+4n^3}\rangle$（Hint：分子、分母同時除以 $n^3$）。

(2) $\langle\frac{1+2n^3}{5+3n+4n^2}\rangle$（Hint：分子、分母同時除以 $n^2$ 並利用 Exercise 1.1 的結果）。

**Excecise 1.3.** 此題希望能找到例子說明不定型的情況，收斂或發散都有可能。

(1) 試找到三個發散的數列 $\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle,\langle c_n\rangle$，滿足 $\langle a_n+b_n\rangle$ 收斂，但 $\langle a_n+c_n\rangle$ 發散。

(2) 試找到三個發散的數列 $\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle,\langle c_n\rangle$，滿足 $\langle a_nb_n\rangle$ 收斂，但 $\langle a_nc_n\rangle$ 發散。

**Excecise 1.4.** 試判斷以下數列收斂或發散，若是收斂請說明其極限。（取自課本習題 2.1(17,18,19,22)）

$$a_n=\frac{n^2}{\sqrt{n^3+4n}}\quad b_n=\sin\frac{n\pi}{2}\quad c_n=\cos\frac{n\pi}{2}\quad d_n=\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n}+\sqrt{n}}.$$

（Hint：$\sqrt{n^3+4n}$ 的最高次項可視為 $n^{3/2}$；$\sqrt[3]{n}=n^{1/3}$, $\sqrt[4]{n}=n^{1/4}$）