1.1.1. 等比數列與級數. 等比數列（geometric sequence）$a, ar, ar^2, \ldots$ 是一種常見的數列，它的通式可寫成 $b_n = ar^n$，其中 a 成為首項，r 稱為公比。我們要求 a, r 皆為非零實數。

很容易看出等比數列的極限會因 r 而影響。最重要的是當 $r > 0$ 時我們有

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 < r < 1; \\ 1, & \text{if } r = 1; \\ \infty, & \text{if } r > 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

此時對於實數 a, ar^n 的極限就可用極限的乘法處理。注意，當 $r > 1$ 時，ar^n 會依 $a > 0, a < 0$ 分別發散到 ∞ 與 $-\infty$。另外，當 $r < 0$ 時，我們也可推得當 $-1 < r < 0$ 時 $\lim\limits_{n\to\infty} ar^n = 0$；而當 $r \leq -1$ 時，ar^n 都會發散。我們有以下結論：

Proposition 1.1.6.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & \textit{if } -1 < r < 1; \\ 1, & \textit{if } r = 1; \\ \infty, & \textit{if } r > 1. \\ \textit{diverges}, & \textit{if } r \leq -1. \end{cases}$$

Example 1.1.7. 課本 Example 2.1.4 要求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n - 1}{6^n}$。由於 $2, 6 > 1$ 所以 $2^n \to \infty, 6^n \to \infty$，原極限是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的不定型。不過 $\dfrac{2^n - 1}{6^n} = (\dfrac{1}{3})^n - (\dfrac{1}{6})^n$，所以原數列可看成兩個收斂（因 $0 < r < 1$）的等比數列的差，故得極限為 0。 $\sharp$

和等比數列有關的就是等比級數（geometric series）。將等比數列 $a, ar, ar^2, \ldots$ 的前 $n+1$ 項加起來就稱為前 $n+1$ 項所成的級數，通常我們用 $s_n = \sum_{k=0}^{n} ar^k$ 來表示。如何將所有的項加起來呢？由於基本上我們只能每次做有限多個加法，無法將無窮多個數加在一起。所以我們會將 s_n 看成新的數列，並以其極限視為將每一項都加起來的值，稱為無窮級數 *infinite series*，用 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} ar^k$ 來表示。由於 $rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n+1}$，可得 $(r-1)s_n = rs_n - s_n = ar^{n+1} - a$，故

$$s_n = a\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \tag{1.4}$$

由式子 (1.4) 以及 Proposition 1.1.6 我們有以下的定理：

Proposition 1.1.8. 考慮首項為 a 公比為 r 的無窮等比級數。

(1) 當 $|r| < 1$ 時，此級數收斂且

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots = \frac{a}{1-r}.$$

(2) 當 $|r| \geq 1$ 時，此級數發散。

Example 1.1.9. 循環小數 $0.\overline{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots$ 可以視為首項為 0.9 公比為 0.1 的無窮等比級數，故由 Proposition 1.1.8 可知此數等於 $\dfrac{0.9}{1 - 0.1} = 1$。

課本 Example 2.1.7 要了解循環小數 $2.3\overline{17}$ 的值。由於

$$2.3\overline{17} = 2.3 + 0.017 + 0.00017 + 0.0000017 + \cdots,$$

我們可以將之視為 2.3 加上首項為 0.017 公比為 0.01 的無窮等比級數，故由 Proposition 1.1.8 得其值為 $\frac{23}{10}+\frac{0.017}{0.99}$。 ♯

1.1.2. 遞迴數列. 生命科學上很多問題的模型會用到遞迴數列（recurrence sequence 或課本用的 difference equation），基本上，遞迴數列表達的便是前後幾項的關係，例如 $b_{n+1}=rb_n+c$，其中 r,c 是給定的實數。如果給定 b_0，那麼

$$b_1=rb_0+c,\quad b_2=rb_1+c=r(rb_0+c)+c=r^2b_0+rc+c, \tag{1.5}$$

如此一直下去，便稱為遞迴數列。

課本（Example 2.1.5, 2.1.6）舉了一個病患每天用藥，藥物在病患身上每天濃度變化情況的模型：$C_{n+1}=0.3C_n+0.2$。假設病患在用藥前一天（第 0 天）沒有用藥，藥物濃度 $C_0=0$ 利用遞迴關係式可得 $C_1=0.2$, $C_2=0.3\times 0.2+0.2=0.26$，如此一直下去，觀察此遞迴數列很可能會趨近一定值。我們假設極限存在，遞迴數列有一個很好的方法讓我們決定其極限為何。首先假設極限為 C，由於 C_{n+1},C_n 都會趨近於 C 故兩邊取極限得 $C=0.3C+0.2$，求得 $C=2/7$。這個方法求極限很簡單，但要注意它必需是知道數列有極限才使用。若數列極限不存在，用這方法還是可以求出值來，不過這個值絕不是極限，因為極限根本不存在。要怎樣確定這個極限是否存在呢？有時光由數字可能會干擾我們看出其規律性，我們可以回到原來抽象的遞迴關係式 $b_{n+1}=rb_n+c$ 看出端倪。由式子 (1.5) 繼續下去可得

$$b_3=rb_2+c=r(r^2b_0+rc+c)+c=r^3b_0+(1+r+r^2)c.$$

這樣大概可以看出（可用數學歸納法證明）對於一般的 $n\in\mathbb{N}$，

$$b_n=r^nb_0+(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})c=r^nb_0+\frac{r^n-1}{r-1}c.$$

又由 Proposition 1.1.6, 1.1.8 我們知道 b_n 只有在 $|r|<1$ 時會收斂，此時可得極限為

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{c}{1-r}.$$

前面所提課本的例子中 $r=0.3, c=0.2$，故得極限為 2/7 與前面吻合。

遞迴數列有時是很複雜的，課本 Example 1.6.5, 2.1.8 探討了所謂的 *logistic difference equation*：$x_{n+1}=cx_n(1-x_n)$，其中 c 是常數。這是一個常用來探討細胞分裂和昆蟲繁殖的模型。課本 Example 2.1.8 舉了 $x_0=0.8, c=2.8$ 以及 $x_0=0.4, c=3.4$ 兩種情況探討。假設這兩種情況都收斂，我們就可用前面的方法，假設收斂到 x。第一種情況由 $c=2.8$，取極限可得 $x=2.8x(1-x)$，故 $x=0$ 或 $x=9/14$。事實上此情況當 $0\leq x_0\leq 1$ 時 x_n 確實收斂：當 $x=0=0,1$ 時收斂到 0；而當 $0<x_0<1$ 時會收斂到 9/14。至於當 $x_0<0$ 和 $x_0>1$ 時，x_n 是發散的，我們有 $\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty$。第二種情況由 $c=3.4$，取極限可得 $x=3.4x(1-x)$，故 $x=0$ 或 $x=12/17$。不過這次完全不同，除了 $x_0=0,1$ 會收斂到 0 外，其他情況都是發散的。即使在 $0<x_0<1$ 的情況，x_n 會在接近 0.84 和 0.45 兩處附近跳動。事實上從 $c=3$ 開始 logistic sequence 就開始會有分歧的情況發生，而且當 c 越大分歧的現象就更多更複雜。有興趣的同學可上網查詢了解。

關於數列極限的性質，最後補充一下課本未提到的夾擠定理（squeeze theorem）。考慮兩個數列 $\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$ 假設對每一項皆有 $a_n \le b_n$，很自然的當 $\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$ 的極限分別為 A, B 時，我們可得 $A \le B$。同理若另一數列 $\langle c_n\rangle$ 滿足 $c_n \le a_n$ 且極限為 C，我們也會有 $C \le A$。而夾擠定理告訴我們的是如果不知數列 $\langle a_n\rangle$ 的極限是否存在，但知道數列 $\langle b_n\rangle$，$\langle c_n\rangle$ 有相同的極限 L 且滿足 $c_n \le a_n \le b_n$ 則 $\langle a_n\rangle$ 的極限必存在且也等於 L。

例如前面談過 $a_n = \begin{cases} 1/n, & \text{當 } n \text{ 為奇數;} \\ 2/n, & \text{當 } n \text{ 為偶數.} \end{cases}$ 這個數列，我們可以考慮 $b_n = \dfrac{2}{n}$ 以及 $c_n = \dfrac{1}{n}$ 這兩個數列。很明顯的我們有 $c_n \le a_n \le b_n$，再加上 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$，故知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

Excecise 1.5. 試判斷以下數列收斂或發散，若是收斂請說明其極限。（取自課本習題 2.1(10,15,20,24)）

$$a_n = \frac{5}{3^n}; \quad b_n = 1 - 0.2^n; \quad c_n = \frac{\pi^{n-1}}{3^n}; \quad d_n = \frac{3^{n+2}}{5^n}.$$

Excecise 1.6. 試判斷以下數列收斂或發散，若是收斂請說明其極限。（取自課本習題 2.1(21,25)）

$$r_n = \frac{10^n}{1+9^n}; \qquad s_n = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}.$$

Hint：分子、分母同時除以分母的最大項。$e \approx 2.718$。

Excecise 1.7. 試將 $1.53\overline{42} = 1.53424242...$ 寫成分數。（取自課本習題 2.1.45）

Excecise 1.8. 已知下列初始為 a_0 的遞迴數列收斂，試求其極限。若有多種可能請說明極限應該是哪一個。（取自課本習題 2.1(28,31,47)）

(1) $a_0 = 2,\ a_{n+1} = 1 - \dfrac{a_n}{3}$。

(2) $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{6}{1+a_n}$。

(3) $a_0 = 0.1,\ a_{n+1} = 2a_n(1-a_n)$。

Excecise 1.9. 對於下列初始為 a_0 的遞迴數列，先計算若收斂其極限為何。再利用前幾項的特性說明其為收斂或發散。（取自課本習題 2.1(29,32)）

(1) $a_0 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$。

(2) $a_0 = 3,\ a_{n+1} = 8 - a_n$。