1.2. 函數的極限

我們將數列極限的概念延伸到函數（function）的極限。兩者不同的地方在於，數列極限考慮的是代整數點的趨勢；而函數極限考慮的是代一個區間內所有的點的趨勢。基本上，若要談函數 $f(x)$ 在某一點 a 的極限，我們可以考慮所有可能極限為 a 但 $a_n \neq a$ 的數列 $\langle a_n \rangle$（即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$）然後考慮新的數列 $\langle f(a_n) \rangle$。如果對所有這樣的數列，$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ 都有同樣的極限值，此極限值就是 $f(x)$ 在點 a 的極限。

1.2.1. 基本定義. 函數的極限包括當 x 趨近於無限大時的極限以及 x 趨近於某一點 a 的極限。而趨近於一點的極限，又可分成左極限以及右極限。我們將一一介紹這幾種極限。

1.2.1.1. x **趨近於無限大的極限.** 給定一個函數 $f(x)$ 我們經常會需要了解當 x 越來越大時 $f(x)$ 會不會趨近於一個定值。我們的做法是考慮數列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ 滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$，然後將 x_n 代入 $f(x)$，看新的數列 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ 是否趨近於一個定值。如果對所有這種趨近於無窮大的數列 $\langle x_n \rangle$ 都會使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$，我們便稱 $f(x)$ 在 x 趨近於無限大時有極限值 L，記為 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$。注意這個極限通常也有人會說成 $f(x)$ 在無限大的極限為 L，這樣的說法有其方便性但不是很正確（因為無限大不是一個點），所以我們盡量避免這種說法。

和數列極限很像，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ 表示任意在 L 附近選一個誤差範圍，當 x 大於某一個數值 M 後，都會使得 $f(x)$ 落在這誤差範圍內。例如課本 Example 2.2.1 所討論的 Monod growth function $f(x) = \dfrac{2x}{5+x}$（養分濃度 x 與細菌成長率 $f(x)$ 的模型）。當 x 越來越大可得 $f(x)$ 會越來越接近 2。事實上我們可得 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$。例如，當我們選取誤差為 0.01，會發現當 $x > 995$ 時 $1.99 < f(x) < 2.01$。

同樣的，我們也可以探討當 x 趨近於負無限大時，函數 $f(x)$ 的極限。也就是說考慮數列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ 滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$，然後將 x_n 代入 $f(x)$，看新的數列 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ 是否趨近於一個定值。如果對所有這種趨近於負無窮大的數列 $\langle x_n \rangle$ 都會使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$，我們便稱 $f(x)$ 在 x 趨近於負無限大時有極限值 L，記為 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$。此時，任意在 L 附近選一個誤差範圍，當 x 小於某一個數值 M 後，都會使得 $f(x)$ 落在這誤差範圍內。

Example 1.2.1. 課本 Example 2.2.3。很容易看出 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ 以及 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$。如果我們考慮 0.001 的誤差範圍，會發現當 $x > 1000$ 時 $0 < \dfrac{1}{x} < 0.001$；而當 $x < -1000$ 時 $-0.001 < \dfrac{1}{x} < 0$。 ♯

當函數 $f(x)$ 滿足 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ 時，函數圖形 $y = f(x)$ 有一個特點，也就是當 x 沿著 x 軸往外（即正無限大或負無限大的方向）移動時，圖形會越來越接近於水平直線 $y = L$。也因此，此時我們稱圖形 $y = f(x)$ 有“水平漸近線”(*horizontal asymptote*)。例如由 Example 1.2.1 我們知 $y = 0$（即 x 軸）為 $y = \dfrac{1}{x}$ 的水平漸近線。注意若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = K$ 其中 $K \neq L$，則 $y = f(x)$ 會有 $y = L$ 以及 $y = K$ 這兩條水平漸近線。

當函數 $f(x)$ 在 x 趨近於無限大時沒有極限，我們便說 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ “不存在”或“發散”。同樣的，若 $f(x)$ 在 x 趨近於負無限大時沒有極限，我們便說 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ “不存在”或“發散”。課本 Example 2.2.7 舉了 $\lim_{x\to\infty}\sin x$ 不存在這個例子。雖然我們將 $x_n = n\pi$ 這個數列代入 $\sin x$ 會得到

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n = \lim_{n\to\infty}\sin(n\pi) = 0.$$

但若代 $x_n = n\pi/2$ 同樣有 $x_n \to \infty$，但 $\lim_{n\to\infty}\sin x_n = \lim_{n\to\infty}\sin(n\pi/2)$ 極限就不存在了。同樣的看法，我們也可知道 $\lim_{x\to-\infty}\cos x$ 不存在。

有一種極限不存在的情況和數列極限的一樣，我們會表示出來，也就是會趨近於正負無限大的情形。換句話說當 x 趨近於無限大時，若 $f(x)$ 的值也趨近於無窮大或負無窮大，我們就會分別用 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 和 $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ 表示。同理，當 x 趨近於負無限大時，如果 $f(x)$ 的值也趨近於無窮大或負無窮大，我們就會分別用 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ 和 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 表示。例如課本 Example 2.2.9 我們有 $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$ 和 $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$。我們也很容易看出 $\lim_{x\to\infty} x^4 = \infty$ 和 $\lim_{x\to-\infty} x^4 = \infty$。發散到正負無限大的狀況，有時在處理極限的問題時很有幫助，千萬不要因為極限不存在而忽視它。

1.2.1.2. x **趨近於給定點的極限.** 我們也可以談當 x 趨近於某一定值 a，函數 $f(x)$ 的極限。此時我們考慮數列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ 其中 x_n 都不會是 a 且滿足 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，然後將 x_n 代入 $f(x)$，看新的數列 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ 是否趨近於一個定值。如果對所有這種趨近於 a 的數列 $\langle x_n\rangle$ 都會使得 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$，我們便稱 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 時有極限值 L，記為 $\lim_{x\to a} f(x) = L$。注意這個極限通常也有人會說成 $f(x)$ 在 a 的極限為 L，這樣的說法有其方便性但容易造成誤解，因為這個極限定義與 $f(x)$ 在 $x = a$ 的取值無關（即使 $f(x)$ 在 $x = a$ 沒有定義也沒關係），這也是我們不考慮 $x_n = a$ 的情況的原因。所以我們盡量避免這種說法。

從這種極限看法，$\lim_{x\to a} f(x) = L$ 表示任意在 L 附近選一個誤差範圍，當 $x \neq a$ 但與 a 夠靠近時（即 $|x-a|$ 小於某一個數值 δ），都會使得 $f(x)$ 落在這誤差範圍內。例如考慮 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$。此時 $f(x)$ 在 $x = 1$ 是沒有定義的（因為分母會等於 0），不過只要 $x \neq 1$，皆會滿足 $f(x) = x+1$。事實上我們可得 $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$。例如，當我們選取誤差為 0.01，會發現當 $x \in (0.99, 1.01)$ 時（即 $|x-1| < 0.01$）皆會滿足 $1.99 < f(x) < 2.01$。

當然了，有可能當 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 的極限不存在。課本 Example 2.3.5 舉了 $\lim_{x\to 0}\sin\dfrac{\pi}{x}$ 不存在這個例子。雖然 $x_n = 1/n$ 這個數列滿足 $x_n \to 0$，我們將 x_n 代入 $\sin\dfrac{\pi}{x}$ 會得到

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\sin(n\pi) = 0.$$

但若代 $x_n = 2/n$ 同樣有 $x_n \to 0$，但 $\lim_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\sin(n\pi/2)$ 極限就不存在了。事實上從課本 Example 2.3.5 的附圖 Figure 7 顯示函數 $\sin\dfrac{\pi}{x}$ 的圖形，在 $x = 0$ 附近是震盪很厲害的。

另一種常見極限不存在的情況，是所謂的分段函數（即函數在不同區域用不同的方法定義），以下例子是課本的 Example 2.3.7，這個函數是描述物種災難性滅絕的模型。

Example 1.2.2. 考慮某一物種的數量函數

$$N(K)=\begin{cases}0, & \text{if } 0\le K<a;\\ K, & \text{if } K\ge a.\end{cases}$$

這裡 a 是一個給定的正數。K 代表的是棲息環境的素質，$N(K)$ 代表數量。此模型表示當環境夠好（即 $K\ge a$），數量便會隨著 K 增長；而環境變差（即 $K<a$），數量便會災難性滅絕歸於零。從課本 Example 2.3.7 所附 $N(K)$ 的圖形（Figure 8），我們可以看出當 K 從 a 的右邊漸漸靠近 a，其極限會是 a（例如考慮數列 $K_n=a+\frac{1}{n}$，可得 $\lim_{n\to\infty}N(K_n)=\lim_{n\to\infty}K_n=a$）；然而當 K 從 a 的左邊漸漸靠近 a，其極限會是 0（例如考慮數列 $K_n=a-\frac{1}{n}$，可得 $\lim_{n\to\infty}N(K_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$）。很明顯的 $\lim_{K\to a}N(K)$ 不存在。 $\sharp$

同前，當 x 趨近於 a 函數 $f(x)$ 趨近於正、負無限大的情形，雖然極限不存在我們仍會分別用 $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ 和 $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ 表示。例如課本 Example 2.3.9 我們有 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$。同理，我們也知 $\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$。

當函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ 或 $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ 時，函數圖形 $y=f(x)$ 有一個特點，也就是當 x 越來越接近 a 時，圖形會越來越接近於鉛直直線 $x=a$。也因此，此時我們稱圖形 $y=f(x)$ 有"鉛直漸近線"（*vertical asymptote*）。例如由課本 Example 2.3.9 所附 $y=\frac{1}{x^2}$ 的圖形（Figure 11）我們可以看到當 x 越來越靠近 0 時，圖形越來越陡峭，因為 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$，所以 $x=0$（即 y 軸）是函數 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 的鉛直漸近線。再次強調，當 x 趨近於 a 函數發散到正負無限大的狀況，有時在處理極限的問題時很有幫助，千萬不要因為極限不存在而忽視它。

1.2.1.3. **單邊極限.** 另一種極限不存在但我們會進一步探討的是"單邊極限"（*one-sided limit*）。通常會發生的就是在分段函數的情形。我們在 Example 1.2.2（課本 Example 2.3.7）中看到當 K 從右邊靠近 a 時其實極限是存在的且極限值為 a，這種情況我們就會用 $\lim_{K\to a^+}N(K)=a$ 來表示。這裡 $K\to a^+$ 表示我們僅考慮用比 a 大的數來逼近 a。一般來說，對一個函數 $f(x)$ 若考慮所有可能極限為 a 的數列 $\langle x_n\rangle$，其中 x_n 皆大於 a，若所有這樣的數列皆滿足 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ 的極限都是 L，我們便稱當 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 的"右極限"（*right-hand limit*）為 L，記為 $\lim_{x\to a^+}f(x)=L$。也可說當 x 從右邊趨近於 a 時，$f(x)$ 的極限為 L。

同樣的，我們也可考慮 x 從 a 的左邊逼近 a，然後看 $f(x)$ 的極限是否存在。也就是說，考慮數列 $\langle x_n\rangle$，其中 x_n 皆小於 a 且 $x_n\to a$。若所有這樣的數列皆滿足 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ 的極限都是 L，我們便稱當 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 的"左極限"（*left-hand limit*）為 L，記為 $\lim_{x\to a^-}f(x)=L$。也可說當 x 從左邊趨近於 a 時，$f(x)$ 的極限為 L。例如在 Example 1.2.2（課本 Example 2.3.7）中看到當 K 從左邊靠近 a 時其實極限是存在的且極限值為 0，因此可得 $\lim_{K\to a^-}N(K)=0$。

討論單邊極限的好處是，它可以幫助我們確認極限的存在性。當然了只要函數在任一邊趨近 a 的極限不存在，則該函數趨近 a 的極限自然不存在。然而，即使函數在任一邊趨

近 a 的極限存在，但極限不同，則依極限定義，該函數趨近 a 的極限仍不存在。不過若函數兩邊趨近 a 的極限都存在且都等於 L，當然此函數趨近 a 的極限就是 L。所以我們有以下結論：

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x). \tag{1.6}$$

這裡 $\Leftrightarrow$ 一般稱為"若且唯若"（*if and only if*）。這個符號表示如果左邊是對的那麼右邊也會對，反之如果右邊是對的那麼左邊也會對。也就是說左右兩邊會同時成立或同時不成立。

Example 1.2.3. 課本 Example 2.4.8 探討絕對值函數 $|x|$ 當 x 趨近於 0 的極限 $\lim_{x\to 0}|x|$。若從左右極限觀點來看，當 $x\to 0^+$ 表示 x 皆大於 0，故此時 $|x| = x$，因此可得

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

然當 $x\to 0^-$ 表示 x 皆小於 0，故此時 $|x| = -x$，因此可得

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x = 0.$$

所以由式子 (1.6) 的若且唯若（或稱"等價關係"）可知 $\lim_{x\to 0}|x| = 0$.

課本 Example 2.4.9 探討極限 $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$。若從左右極限觀點來看，當 $x\to 0^+$ 表示 x 皆大於 0，故此時 $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$，因此可得

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

然當 $x\to 0^-$ 表示 x 皆小於 0，故此時 $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$，因此可得

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1.$$

所以式子 (1.6) 的右式不成立（即 $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$），故由等價關係告訴我們左式也不成立，也就是說 $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在。 ♯

當 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 的左右極限趨近於正、負無限大時，我們依然會把它標示出來。分別用

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \tag{1.7}$$

表示。只要這四種其中一個成立，表示 x 從某一邊越來越接近 a 時，圖形會越來越接近於鉛直直線 $x = a$。也因此，此時圖形 $y = f(x)$ 也有"鉛直漸近線"（*vertical asymptote*）。簡言之，當我們要說明函數圖形 $y = f(x)$ 有鉛直漸近線 $x = a$ 只要檢查式子 (1.7) 其中一個成立即可，不需要檢查 $\lim_{x\to a} f(x)$ 是否趨近於正、負無限大。例如函數 $f(x) = \frac{1}{x}$，我們有 $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ 以及 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$，所以我們僅能說 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在（不能說 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 為正、負無限大）。但從圖形來看，確實 $x = 0$ 為 $y = \frac{1}{x}$ 的鉛直漸近線。常用對數函數 $f(x) = \log x$，由於在 $x \leq 0$ 沒有定義，所以我們也不能探討 $\lim_{x\to 0}\log x$，但能探討 $\lim_{x\to 0^+}\log x$。由於 $\lim_{x\to 0^+}\log x = -\infty$，所以 $x = 0$ 也是 $y = \log x$ 的鉛直漸近線。

Excecise 1.10. 令 $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$。已知 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 以及 $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$。

(1) 試寫下函數圖形 $y = f(x)$ 的水平漸近線以及鉛直漸近線。

(2) 考慮誤差範圍 0.01，試找到 L, S 使得當 $x > L$ 以及 $x < S$ 時都分別會滿足 $0.99 < f(x) < 1.01$。(取自課本 Exercise 2.2.36.)

Excecise 1.11. 做課本 Exercise 2.3.6, 2.3.9.

Excecise 1.12. 試利用 $x < 0$ 時 $|x| = -x$ 說明 $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right) = -\infty$ 以及 $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2-|x|}{2+x} = 1$。(取自課本 Exercise 2.4.35, 2.4.36.)

Excecise 1.13. 令 $g(x) = \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}$。試利用 $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ 求 $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)$ 以及 $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)$，並說明 $\lim\limits_{x\to2} g(x)$ 是否存在。(取自課本 Exercise 2.4.37.)