1.2.2. 極限的性質與技巧. 了解函數極限的定義後，我們就可以探討極限的性質。這些性質都可以很方便讓我們求出極限，我們會利用這些性質探討一些求函數極限的技巧。

前面我們知道函數的極限都可以用數列的極限來表示，所以數列極限的性質，當然都可以套用在函數的極限上。由於我們探討的函數極限有許多種，為了方便起見我們都用 lim 來表示。也就是說，我們介紹的性質都適用於前面介紹過的 x 趨近於 ∞、$-\infty$、a、a^+、a^- 的函數極限。不過要注意，在同一等式中當然是同一個趨近的形式。利用數列極限的性質 Theorem 1.1.2，我們有以下的性質：

Theorem 1.2.4. 假設函數 $f(x), g(x)$ 其極限 $\lim f(x), \lim g(x)$ 皆存在，則

(1) $\lim[f(x)+g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$.

(3) 當 $\lim g(x) \neq 0$ 時，$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

此定理的 (1)、(2)、(3) 分別稱為極限的加法性質、乘法性質、除法性質。同之前數列極限（式子 (1.2)）利用加法與乘法性質，我們也有函數極限的線性性質

$$\lim[rf(x)+sg(x)] = r\lim f(x) + s\lim g(x),\ r, s \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

例如，因為 $\lim\limits_{x\to 3} x = 3$，利用乘法性質，我們有 $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$。所以由線性性質可得

$$\lim_{x\to 3}(2x^2 - x) = 2\times 9 - 3 = 15.$$

函數極限的除法性質中分母 $g(x)$ 極限為 0 的情況被排除在外，因為此時 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 有可能無法馬上確定。我們先探討可以確定極限不存在的情況，即 $\lim f(x) \neq 0$ 的情形。事實上此時可得 $\lim \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \infty$，也就是說函數 $f(x)/g(x)$ 取絕對值的話，其極限會無窮大。不過若去掉絕對值，我們就得依在求極限的附近其正負的情況，判斷會是 ∞、$-\infty$ 或都不是。有時為了方便，我們會用 $\dfrac{1}{0}$ 來表示這種極限。由於這種極限一定不存在，所以它**不是**不定型的極限。不過要記得 $\left|\dfrac{1}{0}\right| = \infty$，所以 $\dfrac{1}{0}$ 這種極限有可能是 ∞、$-\infty$ 或都不是。

Example 1.2.5. 首先考慮 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x^2}$。由於當 x 趨近於 0 時，分子、分母的極限分別為 $\lim\limits_{x\to 0}(x-1) = -1 \neq 0$、$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$，所以我們馬上知道 $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{x-1}{x^2}\right| = \infty$。接著便要討論其正負。由於當 x 趨近於 0（但不等於 0）時 $x-1$ 會是負的，而 x^2 會是正的，所以此時 $\dfrac{x-1}{x^2}$ 小於 0。因此推得 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = -\infty$。

同樣的，我們有 $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{x-1}{x}\right| = \infty$。但當 x 趨近於 0 時 x 有正有負，故只能說 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x}$ 不存在。事實上當 x 從 0 的右邊趨近於 0 時，x 是正的，所以我們有 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x} = -\infty$，同理可得 $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-1}{x} = \infty$。

不論如何，函數圖形 $y-\dfrac{x-1}{x^2}$ 和 $y=\dfrac{x-1}{x}$ 都有一條鉛直漸近線 $x=0$。 ♯

極限的除法 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 中，最令人困擾的就是 $\lim f(x)=\lim g(x)=0$ 的情形。這就是前面數列極限談過的不定型。以後我們還會探討許多不定型，目前這一種不定型，我們用 $\dfrac{0}{0}$ 來表示。稱之為不定型就是因為其極限各種可能都會發生，要進一步處理才能確定。例如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}$ 都是 $\dfrac{0}{0}$ 不定型，前者極限為 0；後者極限不存在。課本 Example 2.4.3, 2.4.5, 2.4.6 分別舉了

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1},\quad \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h},\quad \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2},$$

三個 $\dfrac{0}{0}$ 不定型的例子，其極限分別為 $2, 6, \dfrac{1}{6}$。總之 $\dfrac{0}{0}$ 不定型的極限，可以是任何的實數，要確定其極限為何，目前的方法就是利用代數的方法（例如上下同時除以分母為 0 的因式）將原式改寫成非不定型的形式，再求極限。以後學了微分，我們就可以用更簡單的方法（L'Hospital's Rule）來處理不定型的極限。所以不必太過擔心不定型的極限問題，不過至少要會辨識出哪些是不定型的極限。

Theorem 1.2.4 只適用於兩個函數極限都存在的情形。之前談過兩個數列極限一個存在，另一個不存在的極限問題，對於函數依然適用。由於極限不存在的情形我們依然有興趣於是否趨近於 ∞ 或 $-\infty$，所以這裡我們特別把這些狀況的函數極限整理出來。

Proposition 1.2.6. 假設函數 $f(x)$ 的極限存在且 $\lim f(x)=L$, 而函數 $g(x), h(x)$ 其極限不存在且 $\lim g(x)=\infty, \lim h(x)=-\infty$，則以下成立：

(1) $\lim[f(x)+g(x)]=\infty$ 以及 $\lim[f(x)+g(x)]=-\infty$.

(2) 如果 $L>0$ 則 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$ 且 $\lim[f(x)\cdot h(x)]=\lim\dfrac{h(x)}{f(x)}=-\infty$. 而若 $L<0$ 則 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim\dfrac{g(x)}{f(x)}=-\infty$ 且 $\lim[f(x)\cdot h(x)]=\lim\dfrac{h(x)}{f(x)}=\infty$.

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f(x)}{h(x)}=0$.

Proposition 1.2.6 應該很好理解。例如 (1) 就可以用一個固定的數 L 加上很大很大的數依然會很大這樣了想法去理解。定理中的 (3) 在求極限的問題中經常被使用。當 $g(x)\to\infty$，很容易理解因為分母越來越大，所以 $\dfrac{1}{g(x)}$ 會趨近於 0。又因為 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可視為 $f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ 所以利用極限的乘法性質可得 $f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}\to L\cdot 0=0$。這個性質，有時為了方便我們就用 $\dfrac{1}{\infty}=0$ 來表示。例如當 $h(x)\to-\infty$，我們就可用 $\dfrac{1}{h(x)}\to\dfrac{1}{-\infty}=-0=0$ 來表示。也因此 $\lim\dfrac{f(x)}{h(x)}=\lim[f(x)\cdot\dfrac{1}{h(x)}]=L\cdot 0=0$。課本 105 頁，特別提及當 $p>0$ 時 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^p}=0$，就是因為此時 $\lim\limits_{x\to\infty}x^p=\infty$，所以用 (3)（即 $\dfrac{1}{\infty}=0$）這個性質可以知道

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^p}=\lim_{x\to\infty}x^{-p}=0,\quad \text{for } p>0. \tag{1.9}$$

同樣道理，當 $n \in \mathbb{N}$（表示正整數），我們也會有

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} x^{-n} = 0, \quad \text{for } n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

要注意性質 (3) 並沒有排除 $\lim f(x) = 0$ 的情況。事實上 $f(x) \to 0$，$\frac{1}{g(x)} \to 0$，當然 $f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} \to 0\cdot 0 = 0$。也就是 $\frac{0}{\infty} = 0\cdot\frac{1}{\infty} = 0\cdot 0 = 0$，千萬不要以為 $\frac{0}{\infty}$ 是不定型。

Proposition 1.2.6 的性質 (2) 當 $\lim f(x) = L \neq 0$ 而 $\lim g(x) = \infty$ 時，我們特別用 $\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim \frac{g(x)}{f(x)}$ 這個等號來強調它們其實是同一個概念。這是因為 $L \neq 0$，所以極限的除法性質告訴我們 $\lim \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$。因此 $\lim \frac{g(x)}{f(x)}$ 也可看成是 $\lim[\frac{1}{f(x)}\cdot g(x)]$ 這個乘法的極限。

性質 (2) 排除 $\lim f(x) = 0$ 的情形，因為這種情況極限有可能無法馬上確定。不過在此情況由 $\lim g(x) = \infty$ 和 $\lim h(x) = -\infty$，都可確定 $\lim\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = \lim\left|\frac{h(x)}{f(x)}\right| = \infty$。原因是在除法性質提過當 $f(x) \to 0$ 時，$\frac{1}{f(x)}$ 是 $\frac{1}{0}$ 形式的極限，所以可確定 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| \to \infty$，因此 $\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = |g(x)|\cdot\left|\frac{1}{f(x)}\right| \to \infty\cdot\infty = \infty$，同理可得 $\left|\frac{h(x)}{f(x)}\right| \to \infty$。至於拿掉絕對值後它們的極限會是 $\infty, -\infty$ 或都不是，我們依然要由求極限的附近其正負的情況來判斷。不管如何，這一種極限通常我們用 $\frac{\infty}{0}$ 表示，因為它一定不存在，所以 $\frac{\infty}{0}$ **不是**不定型的極限。

比較令人頭痛的是乘法，也就是當 $\lim f(x) = 0$，$\lim g(x) = \infty$ 和 $\lim h(x) = -\infty$ 時，極限 $\lim[f(x)\cdot g(x)]$ 和 $\lim[f(x)\cdot h(x)]$ 就無法馬上確定了。這種情況就是所謂 $0\cdot\infty$ 的不定型。例如前面式子 (1.9) 我們知道當 p 為任何正實數時 $\lim_{x\to\infty} x^{-p} = 0$，而 $\lim_{x\to\infty} x = \infty$。此時依 $0 < p < 1$, $p = 1$ 以及 $p > 1$，我們有三個 $0\cdot\infty$ 的不定型，分別得到不同的極限：

$$\lim_{x\to\infty}[x^{-p}\cdot x] = \lim_{x\to\infty} x^{1-p} = \begin{cases} \infty, & \text{if } 0 < p < 1; \\ 1, & \text{if } p = 1; \\ 0, & \text{if } p > 1. \end{cases}$$

同樣道理，由式子 (1.10) 我們知道當 n 為任何正整數時 $\lim_{x\to-\infty} x^{-n} = 0$，而 $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$。此時依 $n < 3$, $n = 3$ 以及 $n > 3$，我們有三個 $0\cdot\infty$ 的不定型，分別得到不同的極限：

$$\lim_{x\to-\infty}[x^{-n}\cdot x^3] = \lim_{x\to-\infty} x^{3-n} = \begin{cases} \infty, & \text{if } n = 1, 2; \\ 1, & \text{if } n = 3; \\ 0, & \text{if } n = 4, 5, 6, \ldots. \end{cases}$$

要處理 $0\cdot\infty$ 不定型的極限問題，我們可以將 ∞ 看成 $\frac{1}{0}$，所以可以將 $0\cdot\infty$ 化成 $0\cdot\frac{1}{0}$ 的形式，亦即看成 $\frac{0}{0}$ 的不定型來處理。

接下來我們探討兩個函數極限都不存在時，它們相加、相乘、相除的極限問題。同樣的，極限不存在的情形中，我們只對趨近於 ∞ 和 $-\infty$ 這兩種情況有興趣。以下我們就 $\lim f(x) = \infty$、$\lim g(x) = \infty$ 以及 $\lim h(x) = -\infty$ 的情形先列出可以確定極限的情況。

(1) $\lim[f(x) + g(x)] = \infty$ 以及 $\lim[f(x) - h(x)] = \infty$.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)] = \infty$ 以及 $\lim[f(x)\cdot h(x)] = -\infty$.

這兩個性質都很好理解，一般 (1)、(2) 都會分別用 $\infty+\infty=\infty$ 以及 $\infty\cdot\infty=\infty$ 來簡化說明，只要再注意正負號即可。例如當 $\lim f(x)=-\infty$、$\lim g(x)=-\infty$ 以及 $\lim h(x)=\infty$ 時，我們會有 $\lim[f(x)+g(x)]=-\infty$、$\lim[f(x)-h(x)]=-\infty$ 以及 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\infty$。總而言之，$\infty+\infty$ 以及 $\infty\cdot\infty$ 形式的極限都不存在，它們都**不是**不定型的極限。

在 $\lim f(x)=\infty$、$\lim g(x)=\infty$ 以及 $\lim h(x)=-\infty$ 的情形，性質 (1) 中並未論及 $\lim[f(x)-g(x)]$ 以及 $\lim[f(x)+h(x)]$ 的極限，因為它們都是屬於 $\infty-\infty$ 這種不定型的極限。例如 $f(x)=x+k$, 其中 k 為固定實數，$g(x)=x$ 以及 $h(x)=-2x$。由於 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$、$\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$ 以及 $\lim_{x\to\infty}h(x)=-\infty$，極限 $\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]$ 以及 $\lim_{x\to\infty}[f(x)+h(x)]$ 都是 $\infty-\infty$ 這種形式。然而 $\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=k$，其極限可以是任何的實數；而 $\lim_{x\to\infty}[f(x)+h(x)]=\lim_{x\to\infty}(-x+k)=-\infty$，其極限不存在。所以 $\infty-\infty$ 確為不定型的極限。

上面的例子只是用簡單的例子說明 $\infty-\infty$ 是不定型的極限，其實不定型 $\infty-\infty$ 的極限問題也可能很棘手。課本 Example 2.2.10, 2.2.6 分別舉了 $\lim_{x\to\infty}(x^2-x)$ 以及 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ 這兩個例子，都是 $\infty-\infty$ 這種不定型的極限。由於 $x^2-x(x-1)$，所以 $\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to\infty}[x\cdot(x-1)]$ 可視為 $\infty\cdot\infty$ 這個非不定型的極限，得到其極限為 ∞。而 $\sqrt{x^2+1}-x$ 為了去掉根號，可以改寫成

$$\sqrt{x^2+1}-x=(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

由於 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$ 是 $\infty+\infty$ 形式，其極限為 ∞，所以

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

可視為 $\frac{1}{\infty}$ 這個非不定型的極限，得到其極限為 0。從這裡我們知道處理不定型 $\infty-\infty$ 的極限問題，通常也是利用代數的方法將之化為非不定型的形式就可求出其極限了。

在 $\lim f(x)=\infty$、$\lim g(x)=\infty$ 以及 $\lim h(x)=-\infty$ 的情形，性質 (1), (2) 並沒有論及除法 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 和 $\lim\frac{f(x)}{h(x)}$ 的情形，原因是 $\frac{\infty}{\infty}$ 也是不定型的極限。在數列的極限我們看過許多這類型的極限，處理的方式大多是上下同除分母的最大項，確保化成分母極限不為 0 的情況，這樣就不會是不定型，因而可求出極限。課本 Example 2.2.4、2.2.5 以及 2.2.11 討論的極限 $\lim_{N\to\infty}\frac{2N}{5+N}$、$\lim_{t\to\infty}\frac{8t}{1+4t^2}$ 以及 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x}$ 都是 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型的極限。上下分別除以分母的最大項 N、$4t^2$ 以及 $-x$，可得非不定型的極限形式（分母極限都是 1），進而得到極限分別為 2、0 以及 $-\infty$。

我們這裡談論的是函數之間加、減、乘、除，四則運算的極限問題。在求極限過程中，若極限不是不定型的情形，很快的便能求得其極限或知道極限不存在。所以能分辨是否為不定型的極限很重要。目前函數四則運算的極限不定型的形式有 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0\cdot\infty$ 以及 $\infty-\infty$ 四種。將來談指數型函數時，還會有 1^∞、∞^0 以及 0^0 三種不定型的極限。

對於不定型的極限我們可用代數的方式或是將來學了微分可用各別取微分的方式（即 L'Hospital's Rule）將其化為費不定型的極限來處理。另外還有一種求函數極限的方式，就是前面數列極限也談論過的夾擠定理（squeeze theorem）。首先大家應該不難理解，若兩

函數 $f(x), g(x)$ 當 x 在要討論極限的附近，都滿足 $f(x) \le g(x)$，且 $f(x), g(x)$ 的極限值存在，則會有 $\lim f(x) \le \lim g(x)$。這裡所謂"附近"指的是：如果是 x 趨近於無窮大情形，"附近"表示的是當 x 大於某個數（例如大於 10000）時都滿足 $f(x) \le g(x)$；而如果是 x 趨近於某個實數 a 的情形，"附近"表示的是當 $x \neq a$ 但在包含 a 的某個開區間內（例如 $a = 3$ 時 $x \in (2.99, 3) \cup (3, 3.01)$）都滿足 $f(x) \le g(x)$。在 x 趨近於負無窮大和左、右極限的情況，也是同樣的看法。另外要注意即使在求極限的附近，都滿足 $f(x) < g(x)$ 也僅能推出 $\lim f(x) \le \lim g(x)$ 未必會有 $\lim f(x) < \lim g(x)$。例如考慮 $f(x) = -\dfrac{x^3}{x}$, $g(x) = \dfrac{x^3}{x}$，我們知道 $f(x), g(x)$ 在 $x = 0$ 沒有定義，不過雖然在 $x = 0$ 附近皆有 $f(x) = -x^2 < g(x) = x^2$，但是 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x)$。因為 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$ 而且 $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$。所以切記在取極限時，不等式一定要加上等號。同理，如果另一個函數 $h(x)$ 當 x 在要討論極限的附近，都滿足 $h(x) \le f(x)$，且 $h(x)$ 的極限值存在，則會有 $\lim h(x) \le \lim f(x)$。也就是說此時 $\lim h(x) \le \lim f(x) \le \lim g(x)$。夾擠定理談的是 $\lim h(x) = \lim g(x)$ 這種特殊情況，此時不需假設 $\lim f(x)$ 存在，也能確保 $\lim h(x) = \lim f(x) = \lim g(x)$。夾擠定理正確的敘述如下：

Theorem 1.2.7 (Squeeze Theorem)**.** 對於函數 $f(x)$，若存在兩函數 $g(x), h(x)$ 滿足當 x 在要討論極限的附近，都符合 $h(x) \le f(x) \le g(x)$ 且 $\lim h(x) = \lim g(x) = L$，則 $f(x)$ 的極限存在且 $\lim f(x) = L$。

夾擠定理的意義在於，當我們不知函數 $f(x)$ 的極限是否存在，但認為它存在時。可以嘗試找兩個函數 $g(x), h(x)$ 滿足當 x 在要討論極限的附近，都符合 $h(x) \le f(x) \le g(x)$ 且 $g(x), h(x)$ 有相同的極限 L。此時便可確認 $f(x)$ 的極限存在。而且既然 $f(x)$ 的極限存在，就可以由前面所提的 $L = \lim h(x) \le \lim f(x) \le \lim g(x) = L$，確定 $\lim f(x) = L$。我們看一下課本 Example 2.4.10 有關夾擠定理的例子。

Example 1.2.8. 考慮 $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$，我們要探討極限 $\lim_{x\to 0} f(x)$。首先注意，我們已知 $\lim_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，且極限不是 ∞ 也不是 $-\infty$。所以目前這個極限，無法用前面談論四則運算的極限性質處理。由於對於任意實數 θ 皆有 $-1 \le \sin\theta \le 1$，因此對於 0 附近的點 x（注意 $x \neq 0$）皆滿足 $-1 \le \sin\dfrac{1}{x} \le 1$，又由於 $x^2 > 0$ 所以這個不等式乘上 x^2 可得 $-x^2 \le x^2 \sin\dfrac{1}{x} \le x^2$。現若考慮 $g(x) = x^2$, $h(x) = -x^2$ 對於 0 附近的點 x，皆會滿足 $h(x) \le f(x) \le g(x)$ 且

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} -x^2 = 0, \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

故由夾擠定理知 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$。 ♯

1.3. 連續函數

我們將介紹連續函數（*continuous function*）以及知道一個函數是連續的之後，如何幫助我們處理函數的極限問題。雖然連續在意義上是接續不斷的，但連續函數的定義是先定義在一個點的連續。若在一個函數在一個區間中的每一個點都連續，才會稱此函數為這個區間的一個連續函數。

給定一個點 a，我們先定義何謂在點 a 連續的函數。首先觀察函數 $f(x)$ 若在 $x = a$ 沒有定義，則 $y = f(x)$ 的圖形在 $x = a$ 的位置沒有點對應在其圖形上，所以圖形好像在 $x = a$ 之處斷掉似的，我們當然不會認為 $f(x)$ 在此點連續。另一方面如果當 x 趨近於 a 時 $f(x)$ 的極限不存在（例如趨近於 ∞ 或左右極限不同），表示在 a 的附近函數圖形無法靠攏，我們當然也會認為 $f(x)$ 在此點不連續。最後即使 $f(x)$ 在 $x = a$ 有定義，且當 x 趨近於 a 時 $f(x)$ 的極限存在且極限值為 L，但 $L \neq f(a)$。這表示雖然函數圖形在 a 的附近都往 L 靠攏但在 $x = a$ 突然跳開了，此時我們仍然認為函數 $f(x)$ 在點 a 不連續。綜合以上，在排除了我們認為在點 a 不連續的看法後，我們有以下函數在點 a 連續的定義。

Definition 1.3.1. 給定一實數 a，考慮函數 $f(x)$，若 $f(x)$ 滿足以下三點則稱 $f(x)$ 在 a 點連續。

(1) $f(x)$ 在 $x = a$ 時有定義。

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在。

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$。

例如對於實數 a，我們有 $\lim\limits_{x\to a} x = a$，所以依極限乘法性質，對於任意 $m \in \mathbb{N}$ 皆有 $\lim\limits_{x\to a} x^m = a^m$。也因此對於一個多項式 $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$，利用極限線性性質（式子(1.8)），我們有

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}[c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0] = c_n(\lim_{x\to a} x^n) + \cdots + c_1(\lim_{x\to a} x) + c_0 = c_n a^n + \cdots + c_1 a + c_0 = f(a).$$

所以多項式函數在任何實數點 a 都是連續的。

當 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 的極限存在，但 $f(x)$ 在 a 點不連續，表示 $f(x)$ 在 $x = a$ 時無定義，或是 $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$。此時這種不連續性稱為 *removable discontinuity*，因為若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ 我們只要重新定義 $f(x)$ 在 $x = a$ 的值為 L 即可讓 $f(x)$ 在 a 點連續。也就是說談連續性，極限的存在性還是最重要的。例如課本 Example 2.4.3 考慮的函數 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 是沒有定義的，所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 不連續。但因為 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x + 1) = 2$，如果我們定義 $f(1) = 2$，就會使得 $f(x)$ 在 $x = 1$ 是連續的。所以這個函數 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的不連續性是 removable.

至於函數 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 的極限不存在的情形，也有兩種特別的情況經常被探討。一種是 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$，這種在 a 點的不連續性稱為 *infinite discontinuity*；另一種是 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$，這種在 a 點的不連續性稱為 *jump discontinuity*。在 jump discontinuity 的情形，如果恰有 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ 的情形發生，我們便稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 的左端連續；而若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$，我們便稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 的右端連續。例如在 Example 1.2.3（課本 Example 2.4.9）我們討論過 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ 的情形。我們知 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ 以及 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$，所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的不連續性屬於 jump discontinuity。雖然此函數 $f(x)$ 在 $x = 0$ 無定義，不過當初若定義 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的值為 -1（即 $f(0) = -1$），則 $f(x)$ 就會在 $x = 0$ 的左端連續。當然了若定 $f(0) = 1$。則 $f(x)$ 就會在 $x = 0$ 的右端連續。

函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的連續性既然是用它在 x 趨近於 a 的極限 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ 來定義，很自然的連續和極限有同樣的性質。利用 Theorem 1.2.4，我們有以下連續的性質。

Theorem 1.3.2. 假設函數 $f(x),g(x)$ 在 $x=a$ 都是連續的，則

(1) $f(x)+g(x)$ 在 $x=a$ 連續。

(2) $f(x)\cdot g(x)$ 在 $x=a$ 連續。

(3) 當 $g(a)\neq 0$ 時，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 連續。

不難理解在除法時要排除 $g(a)=0$ 的情況，不只因為分母極限為 0 極限除法性質不適用，事實上當 $g(a)=0$ 時，函數 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 無定義，當然就不連續了。例如課本 Example 2.5.5 考慮有理函數（即兩個多項式相除，英文稱為 rational function）$\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$。若令 $f(x)=x^3+2x^2-1$, $g(x)=5-3x$，由於 $f(x),g(x)$ 都是多項式，我們知道它們在任意的點都是連續的。然而 $g(\frac{5}{3})=0$，所以 $\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$ 在 $x=\frac{5}{3}$ 不連續。不過由於 $g(x)=5-3x$ 在 $x\neq\frac{5}{3}$ 時都不等於 0，所以由 Theorem 1.3.2 (3) 知道 $\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$ 在 $\frac{5}{3}$ 以外的點都是連續的。

當一個函數在一個區間 I 上的所有的點都連續時，我們便稱此函數為在 I 上的連續函數。不過要注意，如果這個區間是包含端點的情況，例如 $I=[a,b]$，則函數不止要在開區間 (a,b) 內所有的點連續，還要在 a 的右端連續，以及 b 的左端連續，才能說在區間 $[a,b]$ 連續。當函數 $f(x)$ 在區間 I 是連續且不是常數時，很容易理解 $f(x)$ 會把 I 上面的點連續沒有斷點送到另一個區間 J。此時我們稱當 $f(x)$ 定義在 I 時其值域為 J。因為沒有間斷，所以若 $a,b\in I$，則對任意介於 $f(a),f(b)$ 之間的點 d，我們都可以找到 c 介於 a,b 之間滿足 $f(c)=d$。這稱為連續函數的中間值定理（intermediate value theorem）。例如課本 Example 2.5.10 考慮函數 $f(x)=4x^3-6x^2+3x-2$，我們知道多項式函數在實數上處處連續。若定義在區間 $[1,2]$，$f(x)$ 的值域會是 $[-1,12]$。由於 $f(1)=-1$, $f(2)=12$ 且 0 介於 $-1,12$ 之間，所以我們可以在 $1,2$ 之間找到一點 c 使得 $f(c)=0$。

我們可以將 Theorem 1.3.2 關於在一點連續函數的四則運算，推廣到以下在區間連續函數的四則運算。

Theorem 1.3.3. 假設函數 $f(x),g(x)$ 在區間 I 都是連續的，則

(1) $f(x)+g(x)$ 在 I 連續。

(2) $f(x)\cdot g(x)$ 在 I 連續。

(3) 當 $g(x)$ 滿足對所有 $a\in I$ 皆有 $g(x)\neq 0$ 時，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 I 連續。否則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 僅在 I 中滿足 $g(a)=0$ 的點 a 不連續。

有了 Theorem 1.3.3 我們就可利用一些已知的連續函數得到更多的連續函數。首先我們來看幾個基本的在整個實數上連續的函數。前面已經提過，若 $f(x)$ 為多項式函數，則

對於任意實數 a 皆有 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$，也就是說多項式函數在任意的實數點都連續，所以它是在整個實數連續的函數。多項式相加與相乘當然還是多項式，所以 Theorem 1.3.3 的 (1), (2) 沒有問題。至於相除的情況，若 $f(x), g(x)$ 都是多項式且 $g(x)$ 不為零多項式，則 Theorem 1.3.3 (3) 告訴我們，有理函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 只有在有限多個點不連續，因為 $g(x) = 0$ 只有有限多個實數解。我們看以下的例子。

Example 1.3.4. 考慮有理函數 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$。由於 $x^2 - 1 = 0$ 只有兩個實數解 $x = -1$ 和 $x = 1$，所以我們知 $f(x)$ 僅在 $-1, 1$ 兩點不連續。由於 $x \to -1$ 時，分子趨近於 -2 而分母趨近於 0，這是 $\frac{1}{0}$ 型的極限，所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 的不連續性屬於 infinite discontinuity（$x = -1$ 會是 $y = f(x)$ 的鉛直漸近線）。而在 $x \to 1$ 時，分子、分母都趨近於 0，這是 $\frac{0}{0}$ 的不定型。分子分母同除 $x - 1$ 可得 $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的不連續性屬於 removable discontinuity。注意 $x = 1$ 不會是 $y = f(x)$ 的鉛直漸近線。

另一種常見在整個實數連續的函數，就是三角的正弦函數 $\sin x$ 與餘弦函數 $\cos x$。回顧一下正餘弦函數的定義，在坐標平面的單位圓上從點 $(1, 0)$ 移動 x 弧長（逆時鐘為正、順時鐘為負），所在的點其 x-坐標為 $\cos x$、而 y-坐標就是 $\sin x$。從點在單位圓的移動，我們觀察其 x-坐標、y-坐標的變化是連續不斷的，所以可以由此理解 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都是實數上的連續函數。而 $\tan x$ 由於其定義為 $\frac{\sin x}{\cos x}$，所以由連續函數除法性質知，$\tan x$ 在 $\cos x \neq 0$ 的點（即 $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$）都是連續的。以後我們也常會用到 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$、$\csc x = \frac{1}{\sin x}$ 以及 $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ 這些三角函數。從除法性質，我們知道 $\sec x$ 連續的點和 $\tan x$ 一樣；而 $\csc x$ 與 $\cot x$ 都在 $\sin x \neq 0$ 的點（即 $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$）都是連續的。

還有一種在實數上連續的函數，就是所謂的指數函數（exponential function）。給定一正實數 b，我們稱 $f(x) = b^x$ 為以 b 為底（base）的指數函數。我們簡單說明一下其定義。當 x 為正整數 n 時，$f(n) = b^n$ 就是把 n 個 b 乘在一起。我們也可定義 $f(\frac{1}{n}) = b^{1/n} = c$ 就是滿足 $c^n = b$ 的正實數。我們也繼續定義 $f(\frac{m}{n}) = (b^{1/n})^m$，也就是 $f(x)$ 在所有的正有理數都可定義。至於對任意的正實數 r，會發現當考慮任由有理數所形成的數列 $\langle x_n \rangle$，若 $x_n \to r$，則 b^{x_n}，會趨近於以固定的實數。我們就定這個實數為 $f(r) = b^r$ 的值。這樣的定義不只讓 $f(x) = b^x$ 在整個正實數有定義且因為滿足當 $x \to r$ 時都會有 $b^x \to b^r$，亦即 $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$，因此也讓 $f(x) = b^x$ 在整個正實數是連續的。若對於負實數 $-r$ 再定義 $f(-r) = \frac{1}{b^r}$，我們就把指數函數 $f(x) = b^x$ 的定義域推廣到負實數且讓它在負實數也是連續的。最後由於 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} b^x = 1$，若我們再定義 $f(0) = b^0 = 1$，就把指數函數 $f(x) = b^x$ 的定義域推廣到整個實數且讓它在所有的實數都是連續的。

知道以上這些函數在哪裡連續，利用 Theorem 1.3.3 我們便可利用它們的四則運算而了解更多的函數在哪裡是連續的。

Example 1.3.5. 我們探討函數 $\frac{2^x \sin x}{x^2 - 1}$ 和 $\frac{x^2 + \cos x}{2 + \sin x}$ 分別在哪裡是連續的。

首先 $2^x \sin x$ 和 x^2-1 在整個實數連續，但 x^2-1 在 $x=-1,1$ 等於 0，故知 $\dfrac{2^x \sin x}{x^2-1}$ 在區間 $(-\infty,-1), (-1,1)$ 以及 $(1,\infty)$ 是連續的。

現考慮 $x^2+\cos x$ 和 $2+\sin x$ 也都在整個實數連續。而分母 $2+\sin x$ 絕不為 0，因為 $-1 \le \sin x \le 1$。因此 $\dfrac{x^2+\cos x}{2+\sin x}$ 仍在整個實數連續。 ♯

合成函數可以讓我們得到更多、更複雜的函數。雖然感覺較複雜，不過極限對於合成函數有很好的性質。給定兩個函數 $f(x), g(x)$，我們用 $f\circ g(x)$ 表示它們的合成函數。意思是，若 a 在 $g(x)$ 的定義域中，我們可以將 a 代入函數 $g(x)$ 中。若所得的值 $g(a)$ 仍在 f 的定義域，則可將 $g(a)$ 再代入 $f(x)$ 中，得到 $f(g(a))$。因此我們定義將 a 代入 $f\circ g(x)$ 的值 $f\circ g(a)$ 為 $f(g(a))$。因為 $f\circ g(a)=f(g(a))$ 對可定義的任意實數 a 皆成立，所以通常我們也將合成函數寫成 $f\circ g(x)=f(g(x))$。例如我們通常將 $(\sin x)^2$ 寫成 $sin^2 x$。它就是令 $f(x)=x^2, g(x)=sinx$ 寫成的合成函數

$$f\circ g(x)=f(g(x))=g(x)^2=(\sin x)^2=\sin^2 x.$$

若反過來合成 $g\circ f(x)$ 就會是 $g(f(x))=g(x^2)=\sin(x^2)$。當然了，若定義域符合的話，我們可以把好多個函數合成起來。例如 $\cos(2^{\sin(x+1)})$，就是將 $x+1$ 代入 $\sin x$，所得的函數 $\sin(x+1)$ 再代入 2^x，最後再將所得的函數 $2^{\sin(x+1)}$ 代入 $\cos x$ 得到的。

接下來我們看合成函數 $f\circ g(x)$ 極限的性質。如果 $g(x)$ 在 a 附近不是常數且當 $x\to a$ 時 $g(x)\to b$，此時若能確定當 $x\to b$ 時 $f(x)\to c$，則

$$\lim_{x\to a} f\circ g(x)=\lim_{x\to a} f(g(x))=\lim_{g(x)\to b} f(g(x))=\lim_{x\to b} f(x)=c. \tag{1.11}$$

特別的，假設 $g(x)$ 在 $x=a$ 連續，我們知當 $x\to a$ 時 $g(x)\to g(b)$，若又假設 $f(x)$ 在 $x=g(a)$ 連續，即 $x\to g(a)$ 時 $f(x)\to f(g(a))$ 則由式子 (1.11) 可得 $\lim_{x\to a} f\circ g(x)=f\circ g(a)$，也就是函數 $f\circ g(x)$ 在 $x=a$ 是連續的。因此我們有關合成函數的連續性。

Theorem 1.3.6. 假設可函數 $g(x)$ 定義在區間 I 其值域為 J 且 $g(x)$ 在 I 為連續。若函數 $f(x)$ 在 J 亦為連續，則合成函數 $f\circ g(x)$ 在 I 為連續。

例如前面所提函數 $\cos(2^{\sin(x+1)})$，由於牽涉的每個函數皆在整個實數連續，所以此函數在整個實數亦連續。

當一個函數 $f(x)$ 定義在區間 I 且為一對一（即 I 中相異兩點 a,b 分別代入 $f(x)$ 所得 $f(a), f(b)$ 也會不同），此時若 $f(x)$ 的值域為 J，則存在一個定義在 J 且值域為 I 的函數 $g(x)$ 滿足 $g\circ f(x)=x$ 且 $f\circ g(x)=x$。這個函數 $g(x)$ 稱為 $f(x)$ 的反函數（*inverse function*），記為 $f^{-1}(x)$。由於 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的圖形對稱於直線 $y=x$，所以若 $f(x)$ 為定義在 I 的連續函數，其圖形連續沒有斷點，則 $f^{-1}(x)$ 的圖形也會是連續沒有斷點。因此 $f^{-1}(x)$ 也會是定義在 J 的連續函數。我們來看一些常見的函數及其反函數。

二次函數 $f(x)=x^2$，雖然定義在整個實數是連續的，但它不是一對一的（例如 $f(-1)=f(1)$）。不過若將之限制在 $[0,\infty)$ 這個區間，它便是一對一的，此時值域也是 $[0,\infty)$。所以它有反函數 $f^{-1}(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$，也會是定義在 $[0,\infty)$ 的連續函數。至於

$g(x) = x^3$ 為在整個實數是一對一的連續函數，其值域也是整個實數，所以它的反函數 $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ 也是定義在整個實數的連續函數。對於一般的實數 r 我們都可定義出函數 $h(x) = x^r$，當 $r > 0$ 時 $h(x)$ 為定義在 $[0, \infty)$ 的連續函數；而當 $r < 0$ 時，因為 $h(x)$ 在 $x = 0$ 無定義，所以是定義在 $(0, \infty)$ 的連續函數。

對於底數為正實數 b 的指數函數 $f(x) = b^x$，前面已知它是定義在整個實數的連續函數。當 $a_1 \neq a_2$ 時 $f(a_1) = b^{a_1} \neq f(a_2) = b^{a_2}$，因為由指數律 $\dfrac{f(a_1)}{f(a_2)} = b^{a_1 - a_2} \neq 1$，所以 $f(x)$ 是一對一的。由於 $f(x)$ 的值域為 $(0, \infty)$，所以它有一個定義在 $(0, \infty)$ 的反函數 $f^{-1}(x) = \log_b(x)$，我們稱為底為 b 的對數函數（logarithmic function）。$\log_b(x)$ 是定義在正實數 $(0, \infty)$ 上的連續函數其值域為整個實數。當底數 $b = 10$ 時，通常就用 $\log x$ 來表示 $\log_{10} x$。微積分最常用的是在底數 $b = e$ 的情況，一般用 $\ln x$ 來表示 $\log_e x$，稱為自然對數（nature logarithm）。

三角函數由於其週期性，我們知道它們在整個實數不會是一對一，不過通常會選取一個包含 0 的最大區間使其為一對一，然後考慮定義在這區間的反函數。例如 $\sin x$ 若限制在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 就會是一對一且值域仍為 $[-1, 1]$。所以它的反函數 $\sin^{-1} x$ 就是定義在 $[-1, 1]$ 且值域為 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的連續函數。同樣的道理 $\cos x$ 若限制在 $[0, \pi]$ 就會是一對一且值域仍為 $[-1, 1]$。所以它的反函數 $\cos^{-1} x$ 就是定義在 $[-1, 1]$ 且值域為 $[0, \pi]$ 的連續函數。至於 $\tan x$，我們是限制在開區間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。因為其值域為整個實數，所以 $\tan x$ 的反函數 $\tan^{-1} x$ 就會是定義在整個實數且值域為 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的連續函數。要注意，通常當 n 是自然數時，我們用 $\sin^n x$ 來表示 $(\sin x)^n$。但這不適用於負整數，因為 $\sin^{-1} x$ 表示 $\sin x$ 的反函數，而不是 $(\sin x)^{-1}$（回顧一下 $(\sin x)^{-1}$ 是用 $\csc x$ 來表示）。為了避免混淆，有時反三角函數是用前面加"arc"（代表是弧度）來表示。例如 $\sin^{-1} x = \arcsin x$, $\cos^{-1} x = \arccos x$ 以及 $\tan^{-1} x = \arctan x$。

Excecise 1.14. 先說明以下課本習題是哪一些類型的極限。若不是不定型直接說明其極限值或不存在；若是不定型，請化成非不定型說明其極限值或不存在。

Section 2.2 (12, 19, 24, 26); Section 2.4 (14, 19, 22)。

Excecise 1.15. 假設考慮兩函數 $f(x), g(x)$ 已知 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ 且 $\lim g(x) = 0$。試利用極限乘法性質說明 $\lim f(x) = 0$，並依此做課本習題 2.4.49, 2.4.51。

Excecise 1.16. 說明以下課本習題求極限的函數是利用哪些連續函數的性質（加法、乘法、除法、合成）確認在所求極限的點連續，並求其極限。（注意：若是除法請說明仍為連續的原因，若是合成請說明是哪些連續函數的合成）

Section 2.4 (5, 6, 7); Section 2.5 (30, 31)。