Chapter 2

微分

我們將從切線斜率的觀點介紹微分。微分事實上牽涉到極限的概念，也因此我們可以利用極限的性質推導出微分的性質與規則。利用這些規則，可以讓我們更輕易的求一個函數的微分。這一章將專注於微分的性質與技巧，下一章再談微分的應用。

2.1. 微分的定義與基本性質

在函數圖形 $y = f(x)$ 上固定一點 P，設其坐標為 $(x_0, f(x_0))$，再在 $y = f(x)$ 上選一個 P 點附近的點 Q。它們的連線 $\overline{PQ}$ 稱為函數圖形 $y = f(x)$ 通過 P, Q 兩點的割線（secant line）。漸漸的將 Q 點沿著 $y = f(x)$ 往 P 點移動，若不管 Q 在 P 的左邊或右邊，這些割線都會趨近於一條線，這一條線便稱為函數圖形 $y = f(x)$ 在 P 點的切線，此切線的斜率便定義成 $f(x)$ 在 x_0 的微分（derivative）。

固定 $y = f(x)$ 上一點 $P(x_0, f(x_0))$，在此圖形上另一點 $Q(t, f(t))$ 與 P 所連直線的斜率為 $\dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$。首先注意，如果 Q 趨近於 P 時直線 $\overline{PQ}$ 會趨近於在 P 點的切線，當然 $\overline{PQ}$ 的斜率也會趨近於該切線的斜率。然而當 t 趨近於 x_0 時，自然 Q 便趨近於 P，所以此時 $\dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$ 的極限值就是在 P 點切線的斜率。我們有以下的定義。

Definition 2.1.1. 對於函數 $f(x)$ 的定義域上一點 x_0，如果極限

$$\lim_{t \to x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

存在，則稱 $f(x)$ 在 x_0 可微（differentiable），且其極限值稱為 $f(x)$ 在 x_0 的"微分值"或"導數"（derivative of $f(x)$ at x_0）並以 $f'(x_0)$ 表示。

定義中兩個極限其實是一樣的，若令 $t = x_0 + h$ 則左邊的分母 $t - x_0$ 就等於右邊的分母 h，而且 $t \to x_0$ 就表示 $h = t - x_0 \to 0$。由於以後在處理為分時，有可能其中一個極限會比另一個好處理，所以我們把兩種寫法都列出。例如在處理 $f(x) = x^2$ 在 $x = 3$ 的微分，我們可以用

$$\frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = 6 + h$$

所以當 $h \to 0$ 可得 $f'(3)=6$。若是用 $\dfrac{f(t)-f(3)}{t-3} = \dfrac{t^2-9}{t-3}$ 就必須使用平方差公式 $t^2-9=(t+3)(t-3)$ 得到 $\dfrac{t^2-9}{t-3}=t+3$，因此由 $t \to 3$ 可得 $f'(3)=6$。

當 $f(x)$ 在 x_0 可微，表示極限 $\lim_{t\to x_0} \dfrac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$ 存在（極限為 $f'(x_0)$）。又由於 $\lim_{t\to x_0}[t-x_0]$ 極限也存在（極限為 0），所以依照極限乘法性質（Theorem 1.2.4(2)），可得

$$\lim_{t\to x_0}[f(t)-f(x_0)] = \lim_{t\to x_0}[\frac{f(t)-f(x_0)}{t-wx_0}\cdot(t-x_0)] = \lim_{t\to x_0}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}\cdot\lim_{t\to x_0}[t-x_0] = f'(x_0)\cdot 0 = 0.$$

這告訴我們 $lim_{t\to x_0} f(t) = f(x_0)$，也就是說 $f(x)$ 在 x_0 是連續的。我們證得了以下的定理。

Theorem 2.1.2. 若函數 $f(x)$ 在 x_0 可微，則 $f(x)$ 在 x_0 連續。

注意這個定理並沒有說 $f(x)$ 在 x_0 連續的話會使得 $f(x)$ 在 x_0 可微，事實上這在一般情況可能是錯的。我們有以下的例子。

Example 2.1.3 (課本 Example 3.2.6)**.** 考慮絕對值函數 $f(x)=|x|$。我們知道 $f(x)$ 在整個實數是連續的。我們探討 $f(x)$ 在哪裡是可微的。在 $x_0>0$ 的情況，當 t 趨近於 x_0 時，t 也會大於 0，故此時

$$f'(x_0)=\lim_{t\to x_0}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}=\lim_{t\to x_0}\frac{|t|-|x_0|}{t-x_0}=\lim_{t\to x_0}\frac{t-x_0}{t-x_0}=1.$$

另一方面，在 $x_0<0$ 的情況，當 t 趨近於 x_0 時，t 也會小於 0，故此時

$$f'(x_0)=\lim_{t\to x_0}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}=\lim_{t\to x_0}\frac{|t|-|x_0|}{t-x_0}=\lim_{t\to x_0}\frac{-t-(-x_0)}{t-x_0}=-1.$$

所以 $f(x)$ 在 $x_0\neq 0$ 的情形是可微的。然而在 $x_0=0$ 時，當 t 趨近於 0 時，t 可能是大於 0、也可能小於 0。事實上此時 $\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}=\dfrac{|t|}{t}$，而在 Example 1.2.3（課本 Example 2.4.9）我們知道 $\lim_{t\to 0}\dfrac{|t|}{t}$ 極限不存在（左極限為 -1；右極限為 1），所以 $f(x)$ 在 0 雖然是連續的，但不可微分。 $\sharp$

若每次求一個函數在某一點的微分都用極限的定義處理，當然是麻煩的事。我們可以探討在一般情況求在 x_0 的微分與 x_0 的關係，也就是將微分這個動作看成是推導出新的函數（稱為導函數）且用 $f'(x)$ 來表示這個導函數。例如前面提到 $f(x)=x^2$ 這個函數，對於 $f(x)$ 在 x_0 的微分依定義為

$$f'(x_0)=\lim_{t\to x_0}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}=\lim_{t\to x_0}\frac{t^2-x_0^2}{t-x_0}=\lim_{t\to x_0}(t+x_0)=2x_0.$$

我們便稱 $f(x)=x^2$ 的導函數是 $f'(x)=2x$。知道 $f(x)$ 的導函數是 $f'(x)$ 後，我們要知道 $f(x)$ 在 x_0 的微分值就可以直接將 x_0 代入 $f'(x)$ 即可。例如已知 $f'(x)=2x$ 是 $f(x)=x^2$ 的導函數，所以要得到 x^2 在 $x=3$ 的微分值，我們將 $x=3$ 代入 $2x$ 得到 $f'(3)=6$，和之前的結果一致。函數 $f(x)$ 的導函數有許多種寫法，除了目前使用的 $f'(x)$ 外，另外一個較常用的寫法是 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$。例如我們可以用 $(x^2)'=2x$ 也可以用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2=2x$ 來表示 x^2 的導函數是 $2x$。

Remark 2.1.4. $f(x)$ 的導函數 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ 這個符號中 $\mathrm{d}x$ 表示對函數的變數 x 微分。如果函數是以 t 為變數，例如 $f(t)$，那它的導函數就得用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$ 來寫。另外絕不能偷懶只寫 $\mathrm{d}f$，它指的是函數 f 取值的差；而 $\mathrm{d}x$ 指的是變數 x 的差，所以必需是 $\mathrm{d}f$ 除以 $\mathrm{d}x$ 才會符合微分的定義。所以有的書用 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 表示 $f(x)$ 的導函數，不過為了與課本一致，我們用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ 來表示。

接下來我們將介紹一系列導函數的性質，有了這些性質我們就可以利用一些已知的函數的導函數推導出更多函數的導函數。再次強調一次，函數 $f(x)$ 在 x_0 的微分值 $f'(x_0)$ 的求法可以直接用定義處理或先求出導函數 $f'(x)$ 再將 x_0 代入得到。由於我們可以很容易用導函數性質推導出許多函數的導函數，所以以後我們幾乎是先求出導函數再代值的方法處理。不論如何千萬不要誤以為“$f'(x_0)$ 是將 x_0 代入 $f(x)$ 再微分”（那只會得到 0）。

以下為了讓式子簡潔好記，當談論到函數與導函數時，由於沒有牽涉到代點取值的問題，我們會單純的將函數 $f(x)$ 簡化寫成 f，而其導函數 $f'(x)$ 寫成 f'。

2.1.1. 線性性質. 微分線性性質（linear rule）指的是如果知道兩函數 $f(x), g(x)$ 的導函數 $f'(x), g'(x)$，對於任意實數 r, s 若我們考慮新的函數 $rf(x)+sg(x)$（簡寫成 $rf+sg$），則它的導函數為 $rf'(x)+sg'(x)$（簡寫成 $rf'+sg'$）。

為了不要符號太複雜，我們將此性質分開成加法（sum rule）與乘係數（constant multiple rule）兩個性質說明。首先我們說明若 $h(x)=f(x)+g(x)$ 則 $h'(x)=f'(x)+g'(x)$。依定義 $h(x)$ 在 x_0 的微分為 $\lim_{t\to x_0}\frac{h(t)-h(x_0)}{t-x_0}$. 然而

$$\frac{h(t)-h(x_0)}{t-x_0}=\frac{(f(t)+g(t))-(f(x_0)+g(x_0))}{t-x_0}=\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}+\frac{g(t)-g(x_0)}{t-x_0},$$

所以當 $t\to x_0$ 利用極限加法性質可得極限值為 $f'(x_0)+g'(x_0)$，亦即 $h'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$。由於這在所有 $f(x), g(x)$ 皆可微的點 x_0 都成立，故得 $h'(x)=f'(x)+g'(x)$，亦即 $(f+g)'=f'+g'$。

同樣的方法，若令 $h(x)=rf(x)$，由於

$$\frac{h(t)-h(x_0)}{t-x_0}=\frac{rf(t)-rf(x_0)}{t-x_0}=r\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}.$$

當 $t\to x_0$ 兩邊取極限可得 $h'(x_0)=rf'(x_0)$。因此 $(rf)'=rf'$。

由以上兩性質就可得導函數的線性性質

$$(rf+sg)'=(rf)'+(sg)'=rf'+sg'.$$

例如當 $f(x)=x,\ g(x)=1$，由微分定義我們知道 $f'(x)=1,\ g'(x)=0$。因此對任意的一次函數 $h(x)=rx+s$ 可得其導函數

$$h'(x)=(rf(x)+sg(x))'=rf'(x)+sg'(x)=r\cdot 1+s\cdot 0=r.$$

以後為了方便，函數 x 和 1 的微分可以直接分別用 $x'=1$ 和 $1'=0$ 來表示，因此可寫成

$$(rx+s)'=rx'+s1'=r\cdot 1+s\cdot 0=r.$$

若用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的寫法可表成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(rx+s)=r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x+s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1=r\cdot 1+s\cdot 0=r.$$

2.1.2. 乘法性質. 微分乘法性質（product rule）指的是如果知道兩函數 $f(x),g(x)$ 的導函數 $f'(x),g'(x)$，若我們考慮新的函數 $f(x)\cdot g(x)$（簡寫成 $f\cdot g$），則它的導函數為 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$（簡寫成 $f'\cdot g+f\cdot g'$）。

首先令 $h(x)=f(x)g(x)$，我們有 $\frac{h(t)-h(x_0)}{t-x_0}=\frac{f(t)g(t)-f(x_0)g(x_0)}{t-x_0}$。由於分子要湊出 $f(t)-f(x_0)$ 和 $g(t)-g(x_0)$ 這兩項，我們特別把分子 $f(t)g(t)-f(x_0)g(x_0)$ 改寫成

$$f(t)g(t)-f(x_0)g(t)+f(x_0)g(t)-f(x_0)g(x_0)=(f(t)-f(x_0))g(t)+f(x_0)(g(t)-g(x_0)).$$

因此當 $t\to x_0$ 時，利用

$$\frac{h(t)-h(x_0)}{t-x_0}=\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}g(t)+f(x_0)\frac{g(t)-g(x_0)}{t-x_0}$$

以及極限加法、乘法性質，兩邊取極限可得 $h'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$。注意這個極限我們用到了 $t\to x_0$ 時 $g(t)\to g(x_0)$，也就是 $g(x)$ 在 x_0 的連續性（因為已知 $g'(x_0)$ 存在，Theorem 2.1.2 確保 $g(x)$ 在 x_0 連續）。因為對所有同時使得 $f(x),g(x)$ 可微的 x_0 都成立，所以推得導函數的乘法性質

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'.$$

例如前面已知 $x'=1$，因此利用 x^2 可寫成 $x\cdot x$，可得

$$(x^2)'=(x\cdot x)'=x'\cdot x+x\cdot x'=1\cdot x+x\cdot 1=2x.$$

而 $x^3=x\cdot x^2$ 故

$$(x^3)'=(x\cdot x^2)'=x'\cdot x^2+x\cdot(x^2)'=1\cdot x^2+x\cdot(2x)=3x^2.$$

這樣一直下去，由其規律假設對於自然數 $n-1$，我們有 $(x^{n-1})'=(n-1)x^{n-2}$，因此用數學歸納法證得

$$(x^n)'=(x\cdot x^{n-1})'=x'\cdot x^{n-1}+x\cdot(x^{n-1})'=1\cdot x^{n-1}+x\cdot(n-1)x^{n-2}=nx^{n-1}.$$

若用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的寫法可表成 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n=nx^{n-1}$. 這個式子稱為微分的 *power rule*。

利用線性以及 power rule，對於多項式函數 $f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$，我們都可得到 $f(x)$ 的導函數

$$(c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0)'=nc_nx^{n-1}+(n-1)c_{n-1}x^{n-2}+\cdots+c_1.$$

例如

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x^5-3x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+3\right)=10x^4-9x^2+x+4.$$

2.1.3. 除法性質. 微分除法性質（quotient rule）指的是如果知道兩函數 $f(x), g(x)$ 的導函數 $f'(x), g'(x)$，若考慮新的函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$（簡寫成 $\frac{f}{g}$），則它的導函數為 $\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$（簡寫成 $\frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$）。

我們直接用乘法性質來處理 $\frac{f}{g}$ 的導函數。由於 $\frac{f}{g}\cdot g = f$，等式兩邊表示是同樣的函數（當然是在 $g(x)\neq 0$ 的地方），將等式兩邊微分，也會是同樣的函數。也就是說 $(\frac{f}{g}\cdot g)' = f'$。利用乘法性質 $(\frac{f}{g}\cdot g)' = (\frac{f}{g})'\cdot g + \frac{f}{g}\cdot g'$，因此 $(\frac{f}{g})'\cdot g + \frac{f}{g}\cdot g' = f'$. 移項後可得

$$(\frac{f}{g})' = \frac{1}{g}(f' - \frac{f}{g}\cdot g') = \frac{1}{g}(\frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g}) = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}.$$

例如課本 Example 3.4.4 有理函數 $\frac{x^2+x-2}{x^3+6}$ 的導函數為

$$\frac{(x^2+x-2)'\cdot(x^3+6)-(x^2+x-2)\cdot(x^3+6)'}{(x^3+6)^2} = \frac{(2x+1)\cdot(x^3+6)-(x^2+x-2)\cdot 3x^2}{(x^3+6)^2}.$$

特別的，當 $f(x)=1$ 是常數時 $f'(x)=0$，因此我們有導函數的倒數性質（reciprocal rule）

$$(\frac{1}{g})' = -\frac{g'}{g^2}.$$

例如前面已知對於自然數 n，我們有 $(x^n)' = nx^{n-1}$，因此利用 x^{-n} 可寫成 $\frac{1}{x^n}$，可得

$$(x^{-n})' = (\frac{1}{x^n})' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{(-n)-1}.$$

因此我們將 power rule 推廣到一般的非零整數 m 皆有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^m = mx^{m-1}.$$

2.1.4. 連鎖性質. 微分連鎖性質（chain rule）指的是如果知道兩函數 $f(x), g(x)$ 的導函數 $f'(x), g'(x)$，我們考慮合成函數 $f(g(x))$（簡寫成 $f\circ g$），則它的導函數為 $f'(g(x))\cdot g'(x)$（簡寫成 $(f'\circ g)\cdot g'$）。

首先令 $h(x) = f(g(x))$，我們有

$$\frac{h(t)-h(x_0)}{t-x_0} = \frac{f(g(t))-f(g(x_0))}{t-x_0} = \frac{f(g(t))-f(g(x_0))}{g(t)-g(x_0)}\cdot\frac{g(t)-g(x_0)}{t-x_0}.$$

如果 $g(x)$ 在 x_0 可微且 $f(x)$ 在 $g(x_0)$ 可微，由於 $g(x)$ 在 x_0 連續，當 $t\to x_0$ 時，如果 $g(x)$ 在 x_0 附近不是常數，則 $g(t)\to g(x_0)$，所以 $\frac{f(g(t))-f(g(x_0))}{g(t)-g(x_0)}$ 的極限為 $f'(g(x_0))$。因此利用極限乘法性質，兩邊取極限可得 $h'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$。而若 $g(x)$ 在 x_0 附近是常數，則 $h(x) = f(g(x))$ 在 x_0 附近也是常數，因此 $h'(x_0) = g'(x_0) = 0$，也就是說此時 $h'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$ 依然成立。因為對所有同時符合 $f(x)$ 在 $g(x_0)$ 可微且 $g(x)$ 在 x_0 可微的那些 x_0 都成立，所以推得導函數的連鎖性質

$$(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'.$$

例如課本 Example 3.5.3 求多項式函數 $(x^3-1)^{100}$ 的導函數，我們不可能將它展開再套用多項式的導函數。而是將之看成合成函數 $f(g(x))$ 其中 $f(x)=x^{100}$, $g(x)=x^3-1$。由於 $f'(x)=100x^{99}$, $g'(x)=3x^2$，利用 chain rule 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(x^3-1\Big)^{100}=100(x^3-1)^{99}\cdot(3x^2)=300x^2(x^3-1)^{99}.$$

事實上對於一般情況，當 m 為非零整數時 $(f(x))^m$ 的導函數，利用 chain rule 和 power rule 會是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))^m=m(f(x))^{m-1}\cdot f'(x).$$

特別的當 $m=-1$ 時 $\dfrac{1}{f(x)}=(f(x))^{-1}$（注意不要和反函數 $f^{-1}(x)$ 搞混），所以我們有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{f(x)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))^{-1}=-(f(x))^{-2}\cdot f'(x)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

和前面說的倒數性質一致。

Example 2.1.5. 我們用兩種方法來求課本 Example 3.5.5 $g(t)=(\dfrac{t-2}{2t+1})^9$ 的導函數。我們可以將 g 看成合成函數 $f\circ h$，其中 $f(t)=t^9, h(t)=\dfrac{t-2}{2t+1}$。所以利用 chain rule 和 quotient rule 可得

$$g'(t)=9(\frac{t-2}{2t+1})^8\cdot(\frac{t-2}{2t+1})'=9(\frac{t-2}{2t+1})^8\cdot\frac{(2t+1)-2(t-2)}{(2t+1)^2}=45\frac{(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}.$$

若不想用 quotient rule 我們也可把 $g(t)$ 寫成 $(t-2)^9\cdot(2t+1)^{-9}$ 再用 product rule 處理。因此得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((t-2)^9\cdot(2t+1)^{-9}\Big)$ 等於

$$(2t+1)^{-9}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t-2)^9+(t-2)^9\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t+1)^{-9}=9(2t+1)^{-9}(t-2)^8+(-9(2t+1)^{-10}2(t-2)^9).$$

再整理得 $g(t)$ 的導函數為 $9(2t+1)^{-10}(t-2)^8(2t+1-2(t-2))=45(2t+1)^{-10}(t-2)^8$。 $\sharp$

2.1.5. 反函數的微分. Chain rule 還可以幫我們處理反函數的導函數。因為 $f(f^{-1}(x))=x$，兩邊函數相同，所以兩邊微分可以得到同樣的導函數，亦即 $f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)=1$。因此移項後可得

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

當然了，若 x_0 會使得 $f(x)$ 在 $f^{-1}(x_0)$ 這一點的微分值為 0 就表示 $f^{-1}(x)$ 在 x_0 的微分不存在。

反函數的微分這個式子不必去記它，遇到實際求反函數的導函數時利用 $f(f^{-1}(x))=x$ 直接微分推導即可。例如 $g(x)=\sqrt{x}$ 是 $f(x)=x^2$ 的反函數，所以求 $\sqrt{x}$ 的導函數，利用 $(\sqrt{x})^2=x$ 兩邊微分得 $2(\sqrt{x})(\sqrt{x})'=1$。因此求得 $\sqrt{x}$ 的導函數為

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-1/2},$$

並且知道 $\sqrt{x}$ 在 $x=0$ 不可微分且在正實數都可微分。

事實上對於任意的正整數 n，我們知道 $x^{1/n}$ 是 x^n 的反函數，所以利用 $(x^{1/n})^n = x$ 兩邊微分得 $n(x^{1/n})^{n-1} \cdot (x^{1/n})' = 1$。因此推得

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}(x^{\frac{1-n}{n}}) = \frac{1}{n}(x^{(\frac{1}{n}-1)}). \tag{2.1}$$

對於非零整數 m 由於 $x^{m/n} = (x^{1/n})^m$ 利用 chain rule 和 power rule 可得

$$(x^{\frac{m}{n}})' = ((x^{\frac{1}{n}})^m)' = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}(x^{\frac{1}{n}})'.$$

因此由式子 (2.1)，我們也可求出 $x^{m/n}$ 的導函數

$$(x^{\frac{m}{n}})' = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot \frac{1}{n}(x^{(\frac{1}{n}-1)}) = \frac{m}{n}(x^{(\frac{m}{n}-1)}) \tag{2.2}$$

式子 (2.2) 將 power rule 又推廣到一般的有理數，也就是說當 $r \neq 0$ 是有理數時

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^r = rx^{r-1}.$$

課本 Example 3.5.1 $\sqrt{x^2+1}$ 和 Example 3.5.4 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ 都可以分別寫成 $(x^2+1)^{1/2}$ 和 $(x^2+x+1)^{-1/3}$ 再利用 chain rule 和 power rule 求得導函數。

Excecise 2.1. 做課本習題 3.1.11, 3.1.26, 3.2.3。

Excecise 2.2. 試利用微分定義求以下函數在 $x = 1$ 的微分值：$f(x) = 5x-9x^2$, $g(x) = x+\sqrt{x}$, $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$。(取自課本習題 3.2 (25, 26, 30))

Excecise 2.3. 考慮拋物線 $y = x^2 + x$。試找到所有通過點 $(2, -3)$ 且與此拋物線相切的直線。並說明通過點 $(2, 7)$ 的直線都不會與此拋物線相切。(取自課本習題 3.3.68)

Excecise 2.4. 用 product、quotient 和 chain rules 求課本習題 3.4.19, 3.5.20, 3.5.34 的導函數。

Excecise 2.5. 做課本習題 3.5 (45, 46, 47, 48)。