2.2. 特殊函數的微分

利用微分的性質，我們很容易推得多項式函數、有理函數、甚至包含根式的函數的導函數。這一節中，我們將介紹指數、對數函數以及三角、反三角函數的微分。進而談論它們之間四則運算以及合成所得的更複雜的函數的微分。

2.2.1. 指數與對數函數. 前面的微分性質無法幫助我們求指數函數的導函數，所以我們必需回歸到定義求最基本的指數函數的導函數。對數函數由於是指數函數的反函數，所以可以用反函數微分的性質求其導函數。

給定正實數 b，令 $f(x) = b^x$ 為以 b 為底的指數函數。給定 x_0，依定義 $f(x)$ 在 x_0 的微分為

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{b^{x_0+h}-b^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{b^{x_0}(b^h-1)}{h} = b^{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{(b^h-1)}{h}.$$

特別的，當 $x_0 = 0$ 時，$f(x)$ 在 $x = 0$ 的微分為 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{b^h-b}{h}$。所以指數函數 $f(x)$ 很有趣，它在任一點 x_0 的微分值滿足 $f'(x_0) = f'(0)\cdot f(x_0)$。也就是說 b^x 在 x_0 的微分值為 $\ell\cdot b^{x_0}$，其中 ℓ 是 b^x 在 0 的微分。例如 2^x 在 x_0 的微分為 $\ell_2 2^{x_0}$；3^x 和 10^x 在 x_0 的微分分別為 $\ell_3 3^{x_0}$ 和 $\ell_{10}10^{x_0}$，其中 ℓ_2 約為 0.69315、ℓ_3 約為 1.09861 以及 ℓ_{10} 約為 2.30259。特別的，如果有一個實數 b 滿足 b^x 在 $x = 0$ 的微分是 1，則 $f(x) = b^x$ 在 x_0 的微分就是 $f(x_0) = b^{x_0}$，也就是說 $f(x)$ 的導函數就是 $f(x)$ 它自己。

事實上這個實數是存在的，我們用 e 來表示它。它的值約為 2.71828，因為它不是有理數，我們無法用小數正確表示其值。以 e 為底的指數函數 e^x 稱為“自然指數函數”(*natural exponential function*)，也有人用 $\exp(x)$ 來表示自然指數函數。我們總結有關 e 的重要性質。首先 e 滿足 $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$，由此可得 $(e^x)' = e^x$。另外這也會等同於

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

以 b 為底的指數函數 b^x 其反函數為以 b 為底的對數函數 $\log_b x$，所以 e^x 的反函數就是 $\log_e x$。由於此對數函數經常被使用，為了方便性，特別用 $\ln x$ 來表示且稱之為“自然對數函數”(*natural logarithmic function*)。利用 e^x 和 $\ln x$ 之間的反函數關係

$$e^{\ln x} = x. \tag{2.3}$$

利用 chain rule 以及 $(e^x)' = e^x$，將式子 (2.3) 左邊微分可得

$$(e^{\ln x})' = e^{\ln x}\cdot(\ln x)' = x(\ln x)'.$$

而式子 (2.3) 右邊微分 $x' = 1$，故由 $x(\ln x)' = 1$ 移項得

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

知道 $\ln x$ 的導函數時 $\frac{1}{x}$，我們就可以利用對數的性質（對數律、換底公式）來處理和指數、對數有關的函數的微分。例如一般以 b 為底的指數函數 b^x 的導函數，就可利用

$\ln b^x = x\ln b$ 這個等式處理。左邊微分為 $(\ln b^x)' = \frac{(b^x)'}{b^x}$；右邊微分為 $(x\ln b)' = \ln b$。故由 $\frac{(b^x)'}{b^x} = \ln b$ 推導出

$$(b^x)' = (\ln b)b^x.$$

回顧前面提過，當 $f(x) = b^x$，則 $f'(x) = f'(0)f'(x)$，因此 $f'(0) = \ln b$。故由 b^x 在 $x = 0$ 的微分定義得

$$\lim_{h\to 0}\frac{b^h - b^0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{b^h - 1}{h} = \ln b.$$

我們可用換底公式，處理以 b 為底的對數函數 $\log_b x$ 的導函數。也就是利用 $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$，兩邊微分得

$$(\log_b x)' = \frac{1}{\ln b}(\ln x)' = \frac{1}{x\ln b}.$$

例如常用（以 10 為底）對數函數 $\log x$ 的導函數為 $(\log x)' = \frac{1}{x\ln 10} = \frac{\log e}{x}$。

同樣的我們也可利用 $\ln x$ 求一般 power function x^r 的導函數，其中 r 為固定實數。也就是利用等式 $\ln x^r = r\ln x$ 兩邊微分。左邊微分為 $(\ln x^r)' = \frac{(x^r)'}{x^r}$；右邊微分為 $(r\ln x)' = r(\ln x)' = \frac{r}{x}$。因此由 $\frac{(x^r)'}{x^r} = \frac{r}{x}$ 可得

$$(x^r)' = \frac{r}{x}\cdot x^r = rx^{r-1}.$$

我們把 power rule 又推廣到一般實數的情況。

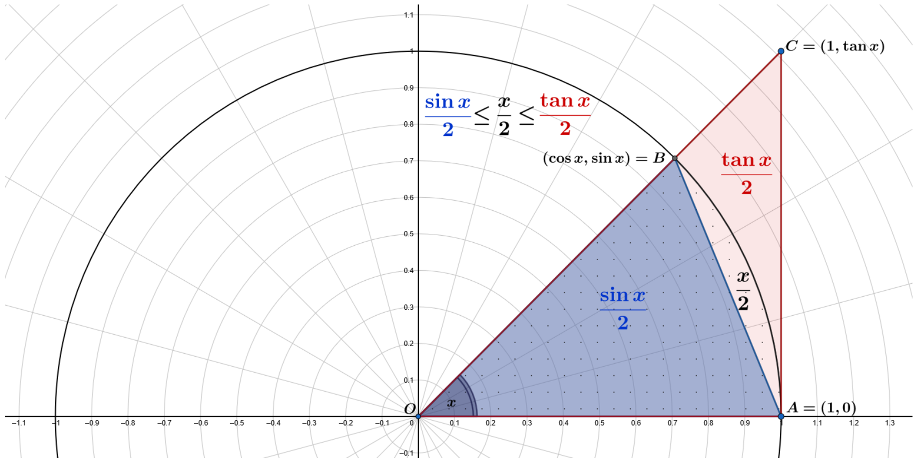
對數律可以將乘除化為加減、次方化為乘法，善用對數往往能讓我們化繁為簡。以後我們會進一步談論如何利用取對數來幫我們簡化求導函數的問題。

2.2.2. 三角與反三角函數. 我們先利用定義求最基本的正弦函數 $\sin x$ 的導函數，然後利用三角函數之間的關係求其他三角函數的導函數。再用反函數微分的性質求反三角函數的導函數。

給定 x_0，依定義 $\sin x$ 在 x_0 的微分為 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(x_0+\theta) - \sin x_0}{\theta}$（我們選這個定義因為可以用和角公式 $\sin(x_0+\theta) = \sin x_0\cos\theta + \cos x_0\sin\theta$），因此

$$\sin'(x_0) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin x_0(\cos\theta - 1) + \cos x_0\sin\theta}{\theta} = \sin x_0\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} + \cos x_0\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}. \quad (2.4)$$

我們必需處理 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta}, \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$ 這兩個 $\frac{0}{0}$ 的不定型極限。首先利用夾擠定理（Theorem 1.2.7）處理當 $x \to 0$ 時 $\frac{\sin x}{x}$ 的極限。下圖是在坐標平面上，以原點 O 為圓心的單位圓。B 點為此圓與 x 軸夾 x 弧度的點。所以三角形 $\triangle BOA$ 面積為 $\frac{1}{2}\sin x$，扇形 $\lhd BOA$ 面積為 $\frac{1}{2}x$，而三角形 $\triangle COA$ 面積為 $\frac{1}{2}\tan x$。



利用它們的大小關係，我們得 $\frac{1}{2}\sin x \le \frac{1}{2}x$，由於 $x > 0$ 所以 $\frac{\sin x}{x} \le 1$。另一方面 $\frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$，由於 $\cos x > 0$ 故得 $\cos x \le \frac{\sin x}{x}$。也就是說當 $x > 0$ 時，我們有 $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$。由於 $\cos x$ 在 0 連續，$\lim_{x\to 0^+}\cos x = \cos 0 = 1$，因此由夾擠定理知 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$。而當 $x < 0$ 時由於 $\sin(-x) = -\sin x$，所以 $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$，因此依然有 $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = 1$，得證

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1. \tag{2.5}$$

至於 $\theta \to 0$ 時 $\frac{\cos\theta - 1}{\theta}$ 的極限，可用 $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ 幫我們處理。為了讓 $\cos\theta$ 轉換成 $\sin\theta$，我們考慮

$$\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = \frac{(\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)}{\theta(\cos\theta + 1)} = \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)} = \frac{-\sin^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1}.$$

注意當 $\theta \to 0$ 時 $\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ 且 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} \to \frac{0}{1+1} = 0$。故得證

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0. \tag{2.6}$$

將式子 (2.5), (2.6) 代入式子 (2.4)，可得 $\sin' x_0 = \cos x_0$。因為這是對任意實數 x_0 都成立，故知 $\sin x$ 的導函數為 $\cos x$，亦即

$$\sin' x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x.$$

接下來我們便可利用三角函數之間的關係以及導函數性質得到其他三角函數的導函數。首先看 $\cos x$ 的導函數。由於 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$，兩邊微分得

$$\cos' x = (\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right))' = \sin'(\frac{\pi}{2} - x)\cdot(\frac{\pi}{2} - x)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

知道 $\sin x, \cos x$ 的導函數，我們就可用 quotient rule 處理 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 的導函數。

$$\tan' x = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\sin' x\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

這裡我們用到了 $\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 以及 $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$。

同理，我們可以用 $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ 處理 $\cot x$ 的導函數。這裡我們由 $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ 直接利用倒數性質處理。

$$\cot' x = (\frac{1}{\tan x})' = \frac{-\tan' x}{\tan^2 x} = -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = -(\frac{1}{\cos x})^2(\frac{\sin x}{\cos x})^{-2} = -(\sin x)^{-2} = -\csc^2 x.$$

同樣的由 $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}, \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ 以及倒數性質可得

$$\sec' x = (\frac{1}{\cos x})' = \frac{-\cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x,$$
$$\csc' x = (\frac{1}{\sin x})' = \frac{-\sin' x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x} = -\cot x \csc x.$$

我們看一下利用這些三角函數微分的例子。

Example 2.2.1. 課本 Example 3.4.7 探討 $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$ 在何處會有水平切線，亦即找出 x_0 使得 $f'(x_0) = 0$。利用 quotient rule 以及 $\sec x, \tan x$ 的導函數，經由化簡可得 $f'(x) = \dfrac{\sec x(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}$. 我們也可以將 $f(x)$ 用 $\sin x, \cos x$ 來表示，再用 quotient rule 處理。亦即

$$f(x) = \frac{\sec x}{1 + \tan x} = \frac{\dfrac{1}{\cos x}}{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x + \sin x}.$$

因此

$$f'(x) = \frac{-(\cos x + \sin x)'}{(\cos x + \sin x)^2} = \frac{\sin x - \cos x}{1 + 2\sin x \cos x}.$$

這兩個方法得到 $f(x)$ 的導函數其實是一樣的。無論如何 $f'(x) = 0$ 發生在 $\sin x - \cos x = 0$（也等同於 $\tan x = 1$），所以在 $x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ 時，會有水平切線。 ♯

Excecise 2.6. 請做以下有關指數函數的微分：課本習題 3.4(4,32), 3.5(5,6,36)。

Excecise 2.7. 請做以下有關對數函數的微分：課本習題 3.7(2,11,12,13,18,19)。

Excecise 2.8. 請做以下有關三角函數的微分：課本習題 3.4.24, 3.5(21,29,32), 3.7(3,4,9)。