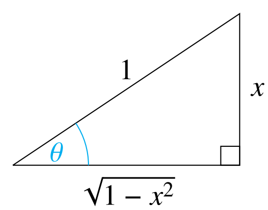
接下來，我們探討三角函數的反函數，即反三角函數的導函數。首先看 $\sin^{-1} x$ 的導函數。由 $\sin\big(\sin^{-1} x\big) = x$，左邊微分得

$$\sin'(\sin^{-1} x) \cdot (\sin^{-1} x)' = \cos\big(\sin^{-1} x\big) \cdot (\sin^{-1} x)$$

等於右邊微分 1，故知 $\sin^{-1} x$ 的導函數為 $\dfrac{1}{\cos\big(\sin^{-1} x\big)}$。這個函數還可以化簡成我們熟悉的樣子。依定義 $\sin^{-1} x$ 表示的是一個（弧度量）的角度 $\theta$，且 $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$（即 $\sin^{-1} x$ 的值域）滿足 $\sin\theta = x$。所以 $\cos\big(\sin^{-1} x\big) = \cos\theta$，由於需滿足 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - x^2$ 且 $\cos\theta \ge 0$，故得 $\cos\big(\sin^{-1} x\big) = \sqrt{1 - x^2}$。因此，$\sin^{-1} x$ 的導函數為

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin^{-1} x = \frac{1}{\cos\big(\sin^{-1} x\big)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

其實要化簡像 $\cos\big(\sin^{-1} x\big)$ 這樣的三角與反三角的合成函數，可以把反三角函數看成角度函數設為 $\theta$，再畫角度為 $\theta$ 相對應的直角三角形。例如 $\theta = \sin^{-1} x$，所以畫出如下 $\sin\theta = x$ 的直角三角形各邊長關係：




就可得 $\cos\big(\sin^{-1}(x)\big) = \cos\theta = \sqrt{1 - x^2}$ 以及 $\tan\big(\sin^{-1}(x)\big) = \tan\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$。

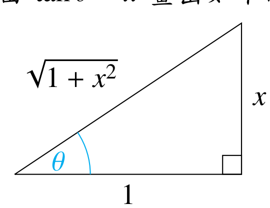
因為 $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$（由 $\sin\theta = \cos\Big(\frac{\pi}{2} - \theta\Big)$ 可得），所以兩邊微分就可得 $\cos^{-1}(x)$ 的導函數為

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos^{-1} x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

另一個很重要的反三角函數 $\tan^{-1} x$ 的導函數，依然可由 $\tan\big(\tan^{-1} x\big) = x$ 推導。將左邊微分且利用 $\tan' x = \sec^2 x$ 可得

$$\big(\tan\big(\tan^{-1} x\big)\big)' = \tan'(\tan^{-1} x) \cdot (\tan^{-1} x)' = \sec^2(\tan^{-1} x) \cdot (\tan^{-1} x)'$$

等於右邊微分 1，故知 $\tan^{-1} x$ 的導函數為 $\dfrac{1}{\sec^2(\tan^{-1} x)}$。其中 $\sec^2(\tan^{-1} x)$ 可以化簡成我們熟悉的樣子。首先令 $\tan^{-1} x = \theta$，由 $\tan\theta = x$ 畫出如下的直角三角形各邊長關係：




就可得 $\sec\big(\tan^{-1}(x)\big) = \sec\theta = \sqrt{1 + x^2}$，因此 $\tan^{-1} x$ 的導函數為

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan^{-1} x = \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

例如課本 3.7.9(b) 求 $f(x) = x\arctan\sqrt{x}$ 的導函數，由 product rule 和 chain rule 可得

$$f'(x) = \arctan\sqrt{x} + x\cdot(\arctan\sqrt{x})' = \arctan\sqrt{x} + x\cdot(\arctan'\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})') = \arctan\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}.$$

至於 $\cot^{-1}x$ 的導函數，由於 $\cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x$，所以

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = -\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{-1}{1+x^2}.$$

另外兩個反三角函數 $\sec^{-1}x, \csc^{-1}x$ 的導函數以後可能比較少用到。不過為了完整性，我們還是探討一下。由 $\sec^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$（因 $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$），兩邊微分得

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \arccos'(\frac{1}{x})\cdot(\frac{1}{x})' = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

注意 $\sqrt{x^4-x^2}$ 中若要將 $x^2$ 提出根號，由於 $x$ 有可能會是負的，所以應寫成 $|x|\sqrt{x^2-1}$。

最後 $\csc^{-1}x$ 的導函數，由於 $\csc^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}x$，所以

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x = -\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

**2.2.3. 隱函數的微分.** 給定函數 $f(x)$，在坐標平面上 $x$ 坐標為 $x_0$ 且 $y$ 坐標為 $f(x_0)$ 的點 $(x_0, f(x_0))$ 就是此函數圖形上的一點。也就是說此函數圖形上的任一點 $(x,y)$ 都會符合 $x,y$ 的方程式 $y = f(x)$。反過來說任何符合一個 $x,y$ 方程式的點 $(x,y)$ 都可形成坐標平面上的圖形，一般稱為曲線。此曲線未必會是一個函數的圖形，不過在曲線上任一點 $(x_0,y_0)$ 附近的圖形，都可以看成是一個函數在此範圍的圖形，這個函數就成為此曲線在 $(x_0,y_0)$ 附近的"隱函數"（*implicit function*）。

考慮單位圓 $x^2+y^2=1$，它不是一個函數的圖形，但在圓上點 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 附近的圖形就和函數圖形 $y = \sqrt{1-x^2}$ 一致，所以我們可以說 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 就是圓 $x^2+y^2=1$ 在點 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 附近的隱函數。所以若要求圓 $x^2+y^2=1$ 在點 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的切線斜率，我們就可將 $f(x)$ 微分，得 $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$，再代入 $x = \frac{1}{2}$，得到斜率為 $\frac{-1}{\sqrt{3}}$。

不過並不是所有坐標平面上的曲線上的點都可以很容易寫下它附近的隱函數。課本 Example 3.5.12 的曲線 $x^3+y^3=6xy$ 就是一例。隱函數的微分就是把方程式的 $y$ 視為 $x$ 的隱函數，然後對方程式等式兩邊對 $x$ 微分，其中 $y$ 對 $x$ 的微分以 $y'$ 表示。由於微分後兩邊仍維持相等，所以就可以得到有關 $y'$ 的等式。例如前面單位圓的方程式為 $x^2+y^2=1$，左邊對 $x$ 微分為 $(x^2+y^2)' = (x^2)'+(y^2)' = 2x+2y\cdot y'$；右邊對 $x$ 為分為 $1'=0$，故得 $x+y\cdot y'=0$，因此在 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 這一點，即 $x=\frac{1}{2}, y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的切線斜率 $y'$ 滿足 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y'=0$，解得 $y' = \frac{-1}{\sqrt{3}}$。我們再看課本的 Example 3.5.12。

**Example 2.2.2.** 求曲線 $x^3+y^3=6xy$ 在點 $(3,3)$ 的切線方程式。首先注意點 $(3,3)$，即 $x=3, y=3$ 確實滿足方程式，也就是 $3^3+3^3=6\cdot3\cdot3$（否則點不在此曲線上，求隱函數

微分無意義）。將曲線方程式兩邊對 $x$ 微分，得 $3x^2+3y^2\cdot y'=6y+6xy'$。因此兩邊代入 $x=3, y=3$ 得 $27+27y'=18+18y'$。解得 $y'=-1$，亦即在點 $(3,3)$ 的切線斜率為 $-1$。因此切線方程式為 $(y-3)=-(x-3)$，即 $x+y=6$。 ♯

隱函數的微分也可以運用在解反函數的導函數。例如 $\ln x$ 是 $e^x$ 的反函數，若以若令 $y=\ln x$，我們有 $e^y=e^{\ln x}=x$。將 $e^y=x$ 兩邊對 $x$ 微分可得 $e^y\cdot y'=1$，因此得 $(\ln x)'=y'=\dfrac{1}{e^y}=\dfrac{1}{x}$。注意這裡我們是要寫出導函數，不是如前面求在某一點的微分值，所以需要將 $y'$ 寫成 $x$ 的函數。

前面提過，取對數可以將複雜的乘法、除法以及指數問題化成簡單的加、減、乘的問題。所以若要求一個有複雜的乘法、除法以及指數相關的函數的導函數，我們可以先令該函數為 $y$，再取自然對數（ln），得到 $\ln y$ 的等式，再利用隱函數微分求出 $y'$。例如課本 Example 3.7.7 求 $f(x)=\dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(x+2)^5}$ 的導函數。可令 $y=\dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$，取自然對數得 $\ln y=\dfrac{3}{4}\ln x+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-5\ln(3x+2)$。利用隱函數兩邊對 $x$ 微分得

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}-5\cdot\frac{3}{3x+2}.$$

注意，因為是求導函數，所以需要將 $y'$ 寫成 $x$ 的函數。故得

$$f'(x)=y'=y\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{15}{3x+2}\right)=\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{15}{3x+2}\right).$$

我們再看一個有趣的指數的例子。

**Example 2.2.3.** 考慮函數 $f(x)=x^x$（定義在 $x>0$）。注意 $x^x$ 不能看成是底數為 $x$ 的指數函數，因為指數函數 $b^x$ 的底數必需是一個固定的正實數 $b$。所以不能因 $b^x$ 的導函數是 $(\ln b)b^x$ 就斷定 $x^x$ 的導函數是 $(\ln x)x^x$。同理 $x^x$ 不能看成是次數為 $x$ 的 power function，因為 power function $x^r$ 的次數必需是一個固定的實數 $r$。所以不能因 $x^r$ 的導函數是 $rx^{r-1}$ 就斷定 $x^x$ 的導函數是 $xx^{x-1}=x^x$。

我們可用隱函數的微分技巧找到 $x^x$ 的導函數。令 $y=x^x$，取自然對數得 $\ln y=x\ln x$。兩邊對 $x$ 微分得

$$\frac{y'}{y}=(x\ln x)'=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=1+\ln x.$$

所以 $x^x$ 的導函數為

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x)=y\cdot(1+\ln x)=x^x+(\ln x)x^x,$$

恰好是剛才錯誤的兩個導函數之和。 ♯

課本 Example 3.7.8 求 $x^{\sqrt{x}}$ 的導函數，也是用相同的方法處理，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{\sqrt{x}}\right)=x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right).$$

**Excecise 2.9.** 請做以下有關三角函數的微分：課本習題 3.4.23, 3.5.25, 3.5.33。

**Excecise 2.10.** 請利用隱函數的微分以 $x,y$ 表示 $y'$：課本習題 3.5.71, 3.5.73。

**Excecise 2.11.** 請求以下曲線在指定點的切線方程式：課本習題 3.5.79, 3.5.80。

**Excecise 2.12.** 請利用取 ln 的方式求導函數：課本習題 3.7.34, 3.7.38, 3.7.39。

**Excecise 2.13.** 請做以下有關 $\tan^{-1}$ 的微分：課本習題 3.7.43, 3.7.44, 3.7.45。