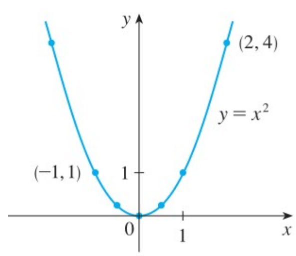
2.3. 微分的應用

知道一個函數的導函數，可以很容易讓我們求得該函數在任一可微分點的微分值。從微分值是函數圖形在該點切線斜率出發，可以發展許多的應用。包括以切線估計附近的值、了解瞬間增長消退的速度、遞增或遞減情況進而到掌握函數的圖形。由於對圖形的了解也能讓我們知道函數在一區域的最大、最小值和均衡固定點問題。也可利用微分來幫我們處理不定型極限問題。

2.3.1. 函數圖形. 知道函數 $f(x)$ 在 x_0 的微分值 $f'(x_0)$，我們便可得到函數圖形 $y = f(x)$ 在點 $(x_0, f(x_0))$ 的切線方程式。因為此切線斜率為 $f'(x_0)$ 且通過點 $(x_0, f(x_0))$，所以切線方程式為 $(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0)$。令 $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ 則函數圖形 $y = g(x)$ 就是此切線，由因為此切線 $y = g(x)$ 在 $x = x_0$ 附近和 $y = f(x)$ 非常接近，所以當 x_1 和 x_0 很近但 $f(x_1)$ 的值不好求時，我們便可用 $g(x_1) = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$ 大致估計 $f(x_1)$ 的值，這就是所謂的“線性估計”（linear approximation）。

例如課本 Example 3.8.1 討論函數 $f(x) = \sqrt{x+3}$ 在 $x = 1$ 的線性估計。由於 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$，我們知 $f'(1) = \dfrac{1}{4}$，所以 $y = f(x)$ 在點 $(1, f(1)) = (1, 2)$ 的切線方程為 $y = \dfrac{1}{4}(x-1) + 2$，也就是說 $g(x) = \dfrac{1}{4}(x+7)$ 是 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 的線性估計函數。例如要估計 $f(0.98)$ 的值，因為 $f(0.98) = \sqrt{3.98}$ 不好求，且 0.98 在 1 附近，所以我們可以用 $g(0.98) = \dfrac{7.98}{4} = 1.995$ 來估計 $f(0.98)$，也就是說 $\sqrt{3.98} \approx 1.995$（當然若單純考慮 $\sqrt{3.98}$ 的近似值，我們可以用函數 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $x = 4$ 的線性估計）。

當我們把函數 $f(t)$ 的變數 t 看成時間，在時間 t 的值 $f(t)$ 看成數量（或距離）。給定一段時間例如 t_1 到 t_2，則 $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ 表示在這段期間平均成長（若是負的表示減少）的速度。所以當 $t_2 \to t_1$，我們就可把 $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ 的極限值 $f'(t_1)$ 視為在 t_1 這個時間點的瞬間成長（若是負的表示減少）速度。從這裡我們可以了解若 $f'(t_1) > 0$，表示在 t_1 附近，數量會漸漸增加，我們稱函數在 t_1 為遞增（increasing）；反之，若 $f'(t_1) < 0$，表示在 t_1 附近，數量會漸漸減少，我們稱函數在 t_1 為遞減（decreasing）。例如下圖為 $f(x) = x^2$ 的圖形。已知 $f'(x) = 2x$。

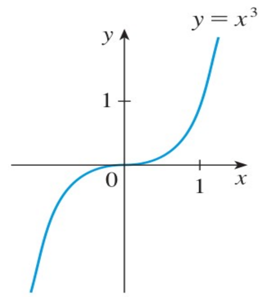


我們有 $f(-1) = 1$ 雖然大於 0，但 $f'(-1) = -2 < 0$。表示 $f(x)$ 在 $x = -1$ 附近的值是遞減的。從圖形可看出 $f(x)$ 在 $x = -1$ 圖形往下降取值越來越小。而 $f(2) = 4$ 且 $f'(2) = 4 > 0$，所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 附近的值是遞增，越來越大。

若 $f(x)$ 在 x_0 的微分值為 0，就有許多情況可能發生。例如上圖中 $f(x) = x^2$，我們有 $f'(0) = 0$。我們發現 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的左邊是遞減的（微分值小於 0），右邊是遞增的（微分值大於 0），所以 $f(x)$ 的圖形在 $x = 0$ 出現頂點，這個情況我們稱函數在此時有局部極值。同樣的，若考慮 $f(x) = -x^2$，雖然 $f'(x) = -2x$，我們仍有 $f'(0) = 0$，不過圖形是倒過來的，$f(x)$ 在 $x = 0$ 的左邊是遞增的，右邊是遞減的，所以在 $x = 0$ 仍然出現頂點，仍為局部極值。要注意，並不是所有微分等於 0 的情況都會出現局部極值，例如 $f(x) = x^3$，雖然 $f'(x) = 3x^2$ 仍有 $f'(0) = 0$，但在 0 左右兩邊微分值都大於 0。都是遞增的，所以 $f(x)$ 在 0 附近仍為遞增（可以想像車子行進中停下來再繼續前行，行進距離一直增加）。因此要注意若 $f'(x_0) = 0$，我們必需由 $f(x)$ 在 x_0 左右兩側的遞增遞減情況，來判斷 $f(x)$ 在 x_0 是遞增、遞減或有局部極值。

當 $f'(t_1) < f'(t_2)$ 從成長速度的角度來看就是在時間 t_2 成長的速度比在 t_1 的成長速度快，也就是切線的斜率較陡峭。例如 $f(x) = x^2$ 的情形，$f'(1) = 2$，在 $x = 1$ 附近圖形切線斜率改變情況是漸增到 2 後繼續增加，這樣的情形我們便稱函數圖形在該點附近為凹向上（concave upward），反之若在該點附近切線斜率是遞減，則稱凹向下（concave down）。例如 $f(x) = -x^2$ 在 $x = 1$ 就是凹向下的。既然要用切線斜率來判斷函數的凹向，而函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 告訴我們在每一點的切線斜率，所以 $f'(x)$ 在 x_0 的微分值的正、負情形便是告訴我們在 x_0 附近其切線斜率變化是遞增或是遞減。因此我們需要探討的是 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 在 x_0 的微分值。

$f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 在 x_0 的微分值稱為 $f(x)$ 在 x_0 的二次微分，記為 $f''(x_0)$。而 $f'(x)$ 的導函數就稱為 $f(x)$ 的二階導函數（second derivative）記為 $f''(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)$（這是 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right)$ 的簡化）。一般來講我們是先推導出 $f(x)$ 的二階導函數 $f''(x)$ 再代 x_0 得到其二次微分的值 $f''(x_0)$。例如要求 $f(x) = x^3 - x^2$ 在 $x = 1$ 的二次微分，由 $f(x)$ 的（一階）導函數為 $f'(x) = 3x^2 - 2x$，得其二階導函數為 $f''(x) = 6x - 2$。所以知道 $f''(1) = 6 - 2 = 4$。利用二階導函數，我們便可以知道當 $f''(x_0) > 0$ 時表示 $f'(x)$ 在 x_0 附近遞增。所以 $f(x)$ 的圖形在 x_0 附近是凹向上；而若 $f''(x_0) < 0$，則 $f(x)$ 的圖形在 x_0 附近是凹向下。要注意的還是 $f''(x_0) = 0$ 的情況，前面提過此時 $f'(x)$ 在 x_0 的情況很多，若是遞增、遞減就表示在 x_0 附近分別為凹向上、凹向下。例如 $f(x) = x^4$、$g(x) = -x^4$，它們在 $x = 0$ 的二次微分皆為 0，且圖形分別為凹向上、凹向下；又若 $f'(x)$ 在 x_0 左右兩邊一邊是遞增、另一邊遞減（即 $f'(x)$ 在 x_0 有局部極值），則在 x_0 的左右兩側函數圖形凹向互反，我們便稱此時圖形在 x_0 發生凹向轉變（inflection）且稱點 $(x_0, f(x_0))$ 為 $f(x)$ 圖形上的“反曲點”（inflection point）。例如下圖為 $f(x) = x^3$ 的圖形，因 $f''(x) = 6x$，得 $f''(0) = 0$，而圖形在 $x = 0$ 的左邊為凹向下（二次微分為負）、右邊為凹向上（二次微分為正），所以原點 $(0, 0)$ 就是 $y = x^3$ 圖形上的反曲點。



我們也要強調千萬不要被凹向上的“向上”兩字誤導，以為凹向上的點函數會遞增。凹向上指的是在該點函數圖形在切線上方，例如 $f(x) = x^2$ 在 $x = -1$ 時遞減的，但 $f''(-1) = 2$，圖形在 $x = -1$ 為凹向上。同樣的，凹向下指的是在該點函數圖形在切線下方，所以未必是遞減的，例如 $f(x) = x^3$ 在 $x = -1$ 遞增，但圖形為凹向下。

目前我們探討的都是函數在一個點附近遞增、遞減以及凹向的問題。我們只知道在這一點“附近”的狀況，但未明確探討該點“附近”所指的範圍。接下來，我們要明確的了解函數遞增、遞減以及凹向所在的範圍。為了簡單起見，我們考慮函數 $f(x)$ 在討論的區間 I 都是可微的。現假設在 I 中有兩點 a,b 其中 $a < b$ 且 $f(a) = f(b)$。如果 $f(x)$ 在 a,b 之間為常數函數（即 $f(x)$ 是定值 $f(a)$），當然 $f(x)$ 在 a,b 之間的導函數為 0。另一方面，如果 $f(x)$ 在 a,b 之間不為常數函數，表示函數值一開始會從 $f(a)$ 往上或往下，然而不管如何最後要回到 $f(b) = f(a)$，所以圖形一定會有頂點出現。在頂點處不可能是遞增，也不可能是遞減，所以其微分值必為 0，也就是說存在一點 c 介於 a,b 之間滿足 $f'(c) = 0$。這就是 *Rolle's Theorem*。

Rolle's Theorem 談的是 $f(a) = f(b)$ 的情況，事實上，它可以推廣到 $f(a) \neq f(b)$ 的情況。一樣假設 $a < b$，考慮連結 $(a, f(a))$、$(b, f(b))$ 兩點的直線 $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ 以及函數 $g(x) = f(x) - \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$。我們有 $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ 以及 $g(b) = f(b) - f(b) = 0$。由於 $g(x)$ 符合 Rolle's Theorem 的假設（即 $g(a) = g(b)$）故存在 c 介於 a,b 之間滿足 $g'(c) = 0$。然而 $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 故此 c 滿足 $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。這就是有關微分重要的定理，稱為“均值定理”（*Mean Value Theorem*）。

Theorem 2.3.1 (Mean Value Theorem)**.** 假設函數 $f(x)$ 在區間 I 可微。則存在 c 介於 a,b 之間使得

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

注意 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 是連接函數圖形上 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 兩點的割線斜率，所以均值定理告訴我們函數圖形上任兩點所形成的割線，一定可在圖形中這兩點之間找到一點其切線與此割線平行。另一方面 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 是函數從 a 到 b 的平均變化率，所以稱之為均值定理。

有均值定理，我們就可以處理以下有關遞增、遞減的性質。

Theorem 2.3.2. 假設函數 $f(x)$ 在區間 I 可微。

(1) 若對任意 $c \in I$ 皆滿足 $f'(c) > 0$，則 $f(x)$ 在區間 I 為遞增。

(2) 若對任意 $c \in I$ 皆滿足 $f'(c) < 0$，則 $f(x)$ 在區間 I 為遞減。

(3) 若對任意 $c \in I$ 皆滿足 $f'(c) = 0$，則 $f(x)$ 在區間 I 為常數。

Proof. 我們先處理 (1) 的情況，即所有 I 中的點 c 皆滿足 $f'(c) > 0$。要證明 $f(x)$ 在 I 為遞增，就是要證明對任意 $a, b \in I$ 且 $a < b$ 都會滿足 $f(a) < f(b)$。由均值定理（Theorem 2.3.1），我們知道存在 c 介於 a, b 之間滿足 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$。然而 c 在 a, b 之間且 $a, b \in I$，故 $c \in I$。所以由 $f'(c) > 0$ 以及 $b > a$，得證 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) > 0$。同樣利用均值定理，在 (2) 的情況，我們有 $f'(c) < 0$，所以得證對 I 中任意兩點 $a < b$ 皆有 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) < 0$，得證 $f(x)$ 在區間 I 為遞減。至於 (3) 的情況由於 $f'(c$ 都等於 0，所以對 I 中任意兩點 a, b 皆有 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = 0$，所以 $f(x)$ 在區間 I 為常數。 □

注意 (3) 的情形。過去我們用微分定義推得常數函數的導函數是零函數。現在我們用均值定理，證明了反向也是對的，也就是說一個函數的導函數若是零函數（即在實數微分值皆為 0）則此函數必為常數函數。

我們可用 $f''(x)$ 為 $f'(x)$ 的導函數將 Theorem 2.3.2 的 $f(x)$ 以 $f'(x)$ 取代，推得以下有關函數圖形凹向的性質。

Theorem 2.3.3. 假設函數 $f(x), f'(x)$ 在區間 I 皆可微。

(1) 若對任意 $c \in I$ 皆滿足 $f''(c) > 0$，則 $f(x)$ 的圖形在區間 I 為凹向上。

(2) 若對任意 $c \in I$ 皆滿足 $f''(c) < 0$，則 $f(x)$ 的圖形在區間 I 為凹向下。

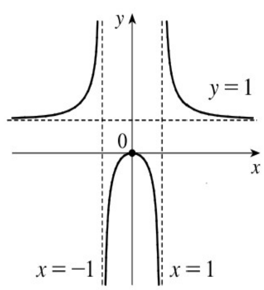
(3) 若對任意 $c \in I$ 皆滿足 $f''(c) = 0$，則 $f(x)$ 的圖形在區間 I 為一直線。

Proof. 令 $g(x) = f'(x)$。由 (1) 的假設知對任意 $c \in I$ 皆滿足 $g'(c) = f''(c) > 0$ 所以由 Theorem 2.3.2 (1) 知 $g(x)$ 在 I 為遞增，這等同於 $y = f(x)$ 上各點切線斜率會隨著 x 增加而增加，所以 $f(x)$ 的圖形在區間 I 為凹向上。而 (2) 的假設表示 $g(x)$ 在 I 為遞減，這等同於 $y = f(x)$ 上各點切線斜率會隨著 x 增加而減少，所以 $f(x)$ 的圖形在區間 I 為凹向下。(3) 的假設由 Theorem 2.3.2 (3) 知 $g(x)$ 在 I 為常數 m，因此在區間 I，$f'(x) = m$。現令 $h(x) = f(x) - mx$，則對任意 $c \in I$ 皆滿足 $h'(c) = f'(c) - m = 0$。因此再次利用 Theorem 2.3.2 (3) 知 $h(x) = f(x) - mx$ 在 I 為常數 r，亦即 $f(x) = mx + r$，得證 $y = f(x)$ 在區間 I 的圖形為直線 $y = mx + r$。 □

了解如何判定一個函數 $f(x)$ 在一個區間、遞減和凹向，我們便可以畫出 $f(x)$ 的圖形。首先利用 $x \to \pm\infty$ 是否 $f(x)$ 極限存在，得知是否有水平漸近線並依其極限值畫出水平漸近線。接著考慮是否存在點 a 使得當 $x \to a^+$ 或 $x \to a^-$，$f(x)$ 會趨近 $\pm\infty$（通常會是 $\frac{1}{0}$ 型的極限）。然後分別找出 $f'(x) > 0$、$f'(x) < 0$ 的區間範圍，以決定 $f(x)$ 遞增、遞減的區間，之後再找出 $f''(x) > 0$、$f''(x) < 0$ 的區間範圍，以決定 $f(x)$ 凹向上、凹向下的區間。最後描出重要的點（y 截距、x 截距，以及 $f'(x) = 0, f''(0) = 0$ 的點等），分別從同一個凹向的區間依其、遞減的狀況描繪出圖形。我們看以下的例子。

Example 2.3.4. 課本習題 4.2.37 要求畫出 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ 的圖形。由 $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ 以及 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$，知道圖形有一水平漸近線 $y=1$。而當分母 x^2-1-0 時，即 $x=\pm1$，分子為 1，也就是說當 $x\to-1$ 和 $x\to1$ 的情況皆為 $\dfrac{1}{0}$ 型的極限，因此 $x=-1$ 和 $x=1$ 為 $y=f(x)$ 圖形的兩個鉛直漸近線。接下來藉由 $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$ 以及 $(x^2-1)^2$ 恆正，我們知 $f'(x)>0$ 當 $x<0$ 以及 $f'(x)<0$ 當 $x>0$。換言之 $f(x)$ 在區間 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,0)$ 遞增；而在區間 $(0,1)$ 以及 $(1,\infty)$ 遞減。又由於 $f''(x)=\dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$ 以及 $6x^2+2,(x^2-1)^2$ 都恆大於等於 0，我們知 $f''(x)>0$ 當 $x^2-1>0$（即 $x<-1;x>1$）以及 $f''(x)<0$ 當 $x^2-1<0$（即 $-1<x<1$）。換言之 $f(x)$ 在區間 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,\infty)$ 凹向上；而在區間 $(-1,1)$ 為凹向下。又代 $x=0$ 得 y 截距為 $f(0)=0$，故圖形通過原點，注意同時因 $f'(0)=0$，所以在原點有水平切線。

現在我們有足夠的資訊畫出 $y=f(x)$ 的圖形。我們從 x 軸左側開始，照著凹向的區間分割順序依序將各區間的圖形畫出。首先考慮 x 在區間 $(-\infty,-1)$，為了確保畫在正確位置（漸近線上方或下方）可以先標出一點，例如 $(-2,f(-2))=(-2,\frac{4}{3})$。知道此區域圖形在漸近線 $y=1$ 的上方（因 $f(-2)=\dfrac{4}{3}>1$），由於在此區間圖形是凹向上且遞增，所以在負無窮遠處沿著 $y=1$ 的上方畫一個凹向上且遞增的曲線。在通過點 $(-2,\frac{4}{3})$ 後繼續往上在接近 $x=-1$ 處漸漸逼近鉛直漸近線 $x=-1$。接下來畫 x 在區間 $(-1,1)$ 之間的圖形，在此區間為凹向下。因為在 $(-1,0)$ 之間為遞增，所以在 $x=-1$ 右側下方貼近漸近線 $x=-1$ 以凹向下遞增方式畫出曲線通過原點。接著因在 $(0,1)$ 之間為遞減，所以在通過原點之後以凹向下遞減方式畫出曲線漸漸往下貼近鉛直漸近線 $x=1$。注意在這部分原點是一頂點。最後 x 在區間 $(1,\infty)$ 的圖形，在此區間為凹向上且遞減。我們依然可先描出一點，例如 $(2,f(2))=(2,\frac{4}{3})$。確認圖形在漸近線 $y=1$ 上方後就可在貼近鉛直漸近線 $x=1$ 的右上方往下畫出一凹向上且遞減的曲線通過點 $(2,\frac{4}{3})$，之後再繼續畫凹向上且遞減的曲線漸漸貼近水平漸近線 $y=1$。下圖便是 $y=f(x)$ 的圖形。



注意此圖形對稱於 y 軸（因 $f(-x)=f(x)$ 為偶函數），所以我們可以先畫出 $x\le0$ 這部分的圖形再利用對稱性畫出 $x>0$ 的部分。 ♯

函數 $f(x)$ 在 x_0 的線性估計 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 可以視為，我們想在 x_0 用一次多項式逼近 $f(x)$。當然也可考慮用二次多項式逼近。由於在 x_0 的二次微分更進一步描繪函數

在 x_0 凹向（彎曲程度），所以可以預期若在 x_0 二次微分取值相同，兩函數就能在 x_0 附近更貼近。所以我們可以考慮二次多項式函數 $g(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$，希望找到 a_0, a_1, a_2 使得 $g(x)$ 和 $f(x)$ 滿足 $g(x_0) = f(x_0)$, $g'(x_0) = f'(x_0)$ 以及 $g''(x_0) = f''(x_0)$。由此可得 $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$ 以及 $2a_2 = f'(x_0)$。也就是 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的二次逼近。我們稱之為 $f(x)$ 在 x_0 二次的 Taylor polynomial。

當然我們可以探討更高次的多項式逼近。函數 $f(x)$ 的二階導函數 $f''(x)$ 的導函數，就稱為三階導函數。用 $f'''(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}f(x)$ 表示。三階導函數在 x_0 的取值，就稱為在 x_0 的三次微分，記為 $f'''(x_0)$。當然還有更高階的導函數，當 $n \geq 4$ 後，函數 $f(x)$ 的 n 階導函數就用 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x)$ 表示。例如當 $f(x) = e^x$，我們有 $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$。而當 $f(x) = \ln x$，則 $f'(x) = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$, $f'''(x) = 2x^{-3}, \ldots.$

利用剛才探討的方式可得 $f(x)$ 在 x_0 三次的 Taylor polynomial 為

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3.$$

而到一般 n 次的 Taylor polynomial 就是

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x - x_0)^n.$$

這裡 $n!$ 指的是 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$，稱為 n 階乘（n factorial）。例如課本 Example 3.8.8 談到 $f(x) = \ln x$ 在 $x = 1$ 的三次 Taylor polynomial，因為 $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$ 以及 $f'''(1) = 2$，所以可得此三次多項式為

$$(x - 1) + \frac{-1}{2}(x - 1)^2 + \frac{2}{6}(x - 1)^3 = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3.$$

我們也可談更高次的 Taylor polynomials。事實上對於 $n \geq 3$，$f(x) = \ln x$ 在 $x = 1$ 的 n 次 Taylor polynomial 為

$$(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x - 1)^n.$$

同樣的，當 $f(x) = e^x$，由於對任意正整數 k 皆有 $f^{(k)}(x) = e^x$，所以 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 的 n 次 Taylor polynomial 為

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Excecise 2.14. 請做有關線性估計問題：課本習題 3.8.11, 3.8.12, 3.8.13.

Excecise 2.15. 做課本習題 4.2.1, 4.2.4, 4.2.5.

Excecise 2.16. 請做作圖題做：課本習題 4.2.28, 4.2.32, 4.2.36. 4.2.41.

Excecise 2.17. 請做有關 Taylor polynomial 問題：課本習題 3.8.36, 3.8.38.