2.3.2. 最大值與最小值. 利用前一小節函數圖形的概念，可以幫助我們了解如何用微分來判定一個函數何時會有局部最大值與局部的最小值。知道這些局部極值發生處後，就可以找到函數在所討論區域的最大值與最小值了。這種找最大值、最小值的方法，在各領域都有重要的應用，稱為最佳化問題（optimization problem)。不過在此不談論這些最佳化的應用問題。我們希望大家理解用微分處理最大值、最小值方法後，對於實際應用問題只要會將問題轉化成數學模型，就可迎刃而解。對於應用問題的例子請參考課本 Section 4.4.4。

首先介紹局部極值（local extreme value）的概念。當函數 $f(x)$ 在 x_0 附近（亦即包含 x_0 的一個開區間上）的取值都小於等於 $f(x_0)$，便稱 $f(x)$ 在 x_0 有局部極大值（local maximum）$f(x_0)$；而若在 x_0 附近的取值都大於等於 $f(x_0)$，便稱 $f(x)$ 在 x_0 有局部極小值（local minimum）$f(x_0)$。這兩種情況便稱 $f(x)$ 在 x_0 有局部極值。

我們知道當 $f'(x_{)}) > 0$ 時，$f(x)$ 在 x_0 附近為遞增；而當 $f'(x_{)}) < 0$ 時，$f(x)$ 在 x_0 附近為遞減。所以只有在 $f'(x_0) = 0$（例如 $f(x) = x^2$ 在 $x_0 = 0$）或 $f(x)$ 在 x_0 的微分不存在（例如 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$）時，才有可能有局部極值發生，這是所謂 Fermat's Theorem。因此我們有以下的定義。

Definition 2.3.5. 對於函數 $f(x)$，若 $f(x)$ 在 x_0 的微分值為 0 或不存在，則稱 x_0 為 $f(x)$ 的 *critical number*。

要注意 critical number 只定義在函數有定義的地方。例如 $f(x) = \dfrac{1}{x}$，雖然 $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ 在 $x = 0$ 無定義，但因 $f(x)$ 本身在 $x = 0$ 也無定義，所以 $x = 0$ 不能算是 $f(x)$ 的 critical number。

Fermat's Theorem 告訴我們只有當 x_0 是 $f(x)$ 的 critical numbers 時，才有可能在 x_0 有局部極值。所以，要找一個函數的局部極值發生處，我們只要先找到它的 critical numbers。不過並不是 critical number 都是局部極值發生處，例如前面提過 $f(x) = x^3$ 的情況，因為 $f'(0) = 0$ 所以 0 是 critical number，但是對於 $f(x) = x^3$，在 $x = 0$ 附近是遞增的（$f'(x) = 3x^2$ 恆正），所以 $f(0) = 0$ 既不是局部最大也不是局部最小。針對 critical number，我們有以下判斷是否為局部極值發生處的方法。

Theorem 2.3.6 (First Derivative Test)**.** 假設 x_0 是函數 $f(x)$ 的 *critical number*。

(1) 如果 $f'(x)$ 在 x_0 左側附近微分值都大於 0，而在 x_0 右側附近微分值都小於 0，則 $f(x)$ 在 x_0 有局部最大值。

(2) 如果 $f'(x)$ 在 x_0 左側附近微分值都小於 0，而在 x_0 右側附近微分值都大於 0，則 $f(x)$ 在 x_0 有局部最小值。

(3) 如果 $f'(x)$ 在 x_0 左右側附近微分值都同號，則 $f(x)$ 在 x_0 取值不會是局部極值。

這個定理很容易理解，因為我們知道微分大於 0 表示遞增，小於 0 表示遞減。所以如果 $f(x)$ 在 x_0 左側微分大於 0 表示它在 x_0 左側漸漸遞增到 $x = x_0$ 時不增加了（微分等於 0）。而若過了 x_0 後（即在 x_0 右側）微分小於 0，表示 $f(x)$ 接著便遞減，因此在 x_0 有局部最大。同理可得其他情況。我們看以下的例子。

Example 2.3.7. 以下分別探討課本 Example 4.2.4, 4.2.8 以及 4.2.9 的局部極值問題。

(1) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$。微分得 $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$。因此 $x = -1, 0, 2$ 為 $f(x)$ 的 critical numbers。而 $f'(x)$ 在 $x = -1$ 左、右側取值分別為負、正。所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 有局部最小值 $f(-1) = 0$。而 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 左、右側取值分別為正、負。所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 有局部最大值 $f(0) = 5$。最後，$f'(x)$ 在 $x = 2$ 左、右側取值分別為負、正。所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 有局部最小值 $f(2) = -27$。

(2) $g(x) = x^4 - 4x^3$。微分得 $g'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$。因此 $x = 0, 3$ 為 $f(x)$ 的 critical numbers。而 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 左、右側取值皆為負。所以 $g(x)$ 在 $x = 0$ 遞減，不會有局部極值。而 $g'(x)$ 在 $x = 3$ 左、右側取值分別為負、正。所以 $g(x)$ 在 $x = 3$ 有局部最小值 $g(3) = -27$。

(3) $h(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$。微分得
$$h'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}(6-x)^{1/3} - \frac{1}{3}x^{2/3}(6-x)^{-2/3} = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}.$$
因此 $x = 0, 6$（微分不存在）以及 $x = 4$（微分等於 0）為 $h(x)$ 的 critical numbers。而 $h'(x)$ 在 $x = 0$ 左、右側取值分別為負、正。所以 $h(x)$ 在 $x = 0$ 有局部最小值 $h(0) = 0$。而 $h'(x)$ 在 $x = 4$ 左、右側取值分別為正、負。所以 $h(x)$ 在 $x = 4$ 有局部最大值 $h(4) = 2^{5/3}$。最後，$h'(x)$ 在 $x = 6$ 左、右側取值皆為負。所以 $h(x)$ 在 $x = 6$ 遞減，不會有局部極值。 ♯

我們也可以用函數在 critical number 的凹向，來判斷其是否為局部最大或局部最小的發生處。如果是凹向下自然是局部最大，而凹向下就是局部最小。又由於凹向可由二次微分的正負來判斷（負為凹向下、正為凹向上），所以我們有以下的定理。

Theorem 2.3.8 (Second Derivative Test)**.** 假設函數 $f(x)$ 在 x_0 的微分值 $f'(x_0) = 0$。

(1) 如果 $f''(x_0) < 0$，則 $f(x)$ 在 x_0 有局部最大值。

(2) 如果 $f''(x_0) > 0$，則 $f(x)$ 在 x_0 有局部最小值。

二次微分檢驗法（Theorem 2.3.8）比起一次微分檢驗法（Theorem 2.3.6）方便多了，只要再做一次微分，檢查在 critical number 的二次微分值正負即可。不過比起一次微分檢驗法，二次微分檢驗法有其限制。首先它僅能檢驗微分值為 0 的 critical number，因為微分值不存在的 critical number，當然就不會有二次微分。另外它也不適用於二次微分為 0 或是不存在的情況。若遇到這些情況，就只能用一次微分檢驗法了。

Example 2.3.9. 我們用二次微分檢驗法再次分別探討課本 Example 4.2.4, 4.2.8 以及 4.2.9 的局部極值問題。

(1) 由 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ 得二階導函數 $f''(x) = 36x^2 - 24x - 24$（注意推得一階導函數 $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$ 後不要先分解，先求二階導函數後，再回去分解一階導函數找 critical numbers）。因此分別代入 $f(x)$ 的 critical numbers $x = -1, 0, 2$，得 $f''(-1) = 36 > 0$、$f''(0) = -24 < 0$ 以及 $f''(2) = 72 > 0$。所以 $f(x)$

在 $x=-1,2$ 有局部最小值，分別為 $f(-1)=0$, $f(2)=-27$。而在 $x=0$ 有局部最大值 $f(0)=5$。

(2) 由 $g(x)=x^4-4x^3$ 得二階導函數 $g''(x)=12x^2-24x$。因此分別代入 $g(x)$ 的 critical numbers $x=0,3$ 得 $g''(0)=0$ 以及 $g''(3)=36>0$。所以我們可以確認 $g(x)$ 在 $x=3$ 有局部最小值 $g(3)=-27$。不過在 $x=0$ 就無法用二次微分檢驗法，只能回到一次微分檢驗法（參見 Example 2.3.7）知 $g(x)$ 在 $x=0$ 遞減，不會有局部極值。

(3) 由 $h(x)=x^{2/3}(6-x)^{1/3}$ 得二階導函數 $h''(x)=\dfrac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$。由於 $x=0,6$ 這兩個 critical number 是讓 $h(x)$ 微分不存在的點，無法用二次微分檢驗法，因此我們只能代入 critical number $x=4$ 得 $h''(4)=-2^{-4/3}<0$。所以我們只能確認 $h(x)$ 在 $x=4$ 有局部最大值 $h(4)=2^{5/3}$。其餘兩點 $x=0,6$ 只能回到一次微分檢驗法（參見 Example 2.3.7）知 $h(x)$ 在 $x=0$ 有局部最小值 $h(0)=0$；但在 $x=6$ 遞減，不會有局部極值。 $\sharp$

了解了局部極值，我們接下來談絕對極值。所謂函數 $f(x)$ 在一個區域的絕對極值，就是指在這區域中的最大值與最小值，分別稱為絕對最大值（*absolute maximum*）以及絕對最小值（*absolute minimum*）。如何找到絕對極值呢？我們不可能將整個區域的點代入比較，最好的方法就是找到可能為極值的點再代入比較。由於一般要探討的區域都是一些區間的聯集，而可能為極值的點就是函數在各區間的局部的極值以及各區間的端點。所以我們只要將可能發生局部極值的點，即 critical numbers 以及各個端點一一代入函數比較大小即可。注意這裡我們只是要找到最大最小值，所以可以不必管這些 critical numbers 是否可得局部最大或局部最小。另外由於這些區間可能不包含端點（例如開區間），仍然要將這些端點代入比較。不過最後的最大值若僅發生在這些未被包含的端點上，就知最大值不存在。同理最小值若僅發生在未被包含的端點上，就知最小值不存在。我們看以下的例子。

Example 2.3.10. 課本 Example 4.1.6 討論函數 $f(x)=x(x-3)(8-x)$ 在 $0\le x\le 9$ 的絕對最大值與絕對最小值。由於 $f(x)=-x^3+11x^2-24x$，我們有 $f'(x)=-3x^2+22x-24=-(3x-4)(x-6)$，因此 $x=\dfrac{4}{3},6$ 為 critical numbers。又由於討論的區域端點為 $x=0,9$，代入這四點得 $f(0)=0$, $f(\dfrac{4}{3})=-\dfrac{400}{27}$, $f(6)=36$ 以及 $f(9)=-54$。所以 $f(x)$ 在閉區間 $[0,9]$ 有絕對最大值 36（發生於 $x=6$），以及絕對最小值 -54（發生於 $x=9$）。

若問題改為 $0<x<9$ 這個開區間的絕對最大值與最小值。仍然要代端點 $x=0,9$ 進去比較。不過此時最小值發生處 9 不在範圍內，所以只能說 $f(x)$ 在閉區間 $(0,9)$ 有絕對最大值 36（發生於 $x=6$），但無絕對最小值（因為每一點代值都大於 -54，但在開區間 $(0,9)$ 沒有任一點的取值會是 -54）當初若沒有將 $x=9$ 代入比較就會誤以為最小值為 $-\dfrac{400}{27}$。又若討論的區域為 $0<x\le 3$，此時 critical number $x=6$ 不在範圍內所以不必帶入，但端點改為 $x=0,3$ 所以只要比較 $f(0)=0$, $f(\dfrac{4}{3})=-\dfrac{400}{27}$ 以及 $f(3)=0$。$f(x)$ 在區間 $(0,3]$ 有絕對最小值 $-\dfrac{400}{27}$（發生於 $x=\dfrac{4}{3}$）。至於絕對最大值，由於 $x=3$ 仍在此區間所以 0 是絕對最大值但只發生於 $x=3$。 $\sharp$

最後我們說明一下，求絕對最大值與最小值的區域沒有邊界的情況。此時我們可以利用 $x \to \infty$ 和 $x \to -\infty$ 來取代其邊界值。若忘了看此極限會造成誤判的情形。當然了，若最大值或最小值發生在此極限，則此極值依然不存在。例如所要考慮的函數是 $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$，區域是 $(-\infty, 2]$，此時除了代此區間內的 critical numbers 以及 2 比較大小外，還要考慮 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 與它們的大小關係。由 $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(x+1)(x-1)$ 知 critical numbers 為 $-1, 0, 1$。分別代入 $f(x)$ 得 $f(-1) = f(1) = 3$, $f(0) = 2$。再代端點 $f(2) = -6$。若忘了加入 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 比較，會誤以為絕對最小值為 -6。事實上 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 的絕對最大值為 3，但沒有絕對最小值。

Excecise 2.18. 做課本有關 critical numbers 習題 4.1 (33, 36, 38, 39, 40)。

Excecise 2.19. 做課本習題 4.2.13, 4.2.18。

Excecise 2.20. 做課本有關局部極值習題 4.2.21, 4.2.24。

Excecise 2.21. 做課本有關絕對極值習題 4.1 (46, 47, 51, 53)。