2.3.3. 不定型的極限. 我們曾經探討過不定型的極限問題。利用微分可以將 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 這兩種不定型化成非不定型的形式，因而可依此得到極限。這種方法就是所謂的 L'Hospital's Rule。了解如何利用 L'Hospital's Rule 處理這兩種不定型後，其他的不定型極限問題，只要將之轉化成這兩種不定型的形式，就可以處理了。這一節中處理的極限皆適用於 $x \to \infty$、$x \to -\infty$、$x \to a$、$x \to a^+$ 以及 $x \to a^-$，所以我們在敘述定理時極限依然簡單用 lim 來表示，而不再區分是 x 趨近於哪一種情況。

假設 $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ 則 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 就是所謂的 $\frac{0}{0}$ 不定型極限。我們利用 $x \to a$ 的情況簡單說明 L'Hospital's Rule 的概念。當 $f(x), g(x)$ 在 $x = a$ 可微時，依可微則連續的性質知 $f(x), g(x)$ 在 $x = a$ 是連續的，亦即 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ 以及 $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$。此時 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ 表示 $f(a) = g(a) = 0$，所以

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

，同理當處理 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型時，即 $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$ 時，由於 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$ 以及 $\lim \frac{1}{g(x)} = \lim \frac{1}{f(x)} = 0$，我們依然可將之視為 $\frac{0}{0}$ 處理，而推得極限也和 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 一致。這就是 L'Hospital's Rule 大致的概念。我們將之詳述如下。

Theorem 2.3.11 (L'Hospital's Rule)**.** 假設 $f(x), g(x)$ 在所求極限附近可微且滿足 $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ 或 $\lim |f(x)| = \lim |g(x)| = \infty$，則

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注意，從前面的解釋中應可理解只有當 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 這兩種不定型時，才可以用 L'Hospital's Rule。當不是不定型時，已知極限為何，當然就不需用到 L'Hospital's Rule，甚至不能用（會得到錯誤的結果）。例如 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1}$ 為 $\frac{1}{0}$ 型，不是不定型且知極限不存在。但 $x^2, x - 1$ 的微分分別為 $2x, 1$。若誤用 L'Hospital's Rule，會得到其極限為 $\lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} = 2$ 這個錯誤結論。另外 L'Hospital's Rule 是將 $f(x), g(x)$ 分別微分再相除求極限，而不是將整個 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 微分。

Example 2.3.12. 課本 Example 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 考慮以下三個極限

$$(1)\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}, \qquad (2)\ \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}, \qquad (3)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

首先確認它們分別為不定型 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 以及 $\frac{\infty}{\infty}$，所以可以套用 L'Hospital's Rule。

(1) 因 $\ln x, x - 1$ 的導函數分別為 $\frac{1}{x}, 1$，故得 $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1}$。此時已非不定型，故可求得極限為 1。

(2) 因 e^x, x^2 的導函數分別為 $e^x, 2x$，故得 $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}$。此時仍為 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型，故再套用一次 L'Hospital's Rule，即再將 $e^x, 2x$ 微分，分別得 $e^x, 2$（此時非不定型），可求得極限為

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty.$$

(3) 因 $\ln x, \sqrt{x}$ 的導函數分別為 $\frac{1}{x}, \frac{1}{2\sqrt{x}}$，故得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

注意因此時 $\frac{1}{x}\to 0$ 以及 $\frac{1}{2\sqrt{x}}\to 0$，故仍為不定型（$\frac{0}{0}$），但不需再用 L'Hospital's Rule（否則 $\frac{1}{x}, \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 的導函數會越來越複雜）。可先將之化簡再求得極限為

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

♯

從 Example 2.3.12(2) 我們知道，有時要套用好幾次 L'Hospital's Rule 才能得到極限值，但又由 (3) 我們知道 L'Hospital's Rule 並非永遠是最好用的，有時利用簡單的代數化簡搭配使用才能有效解決問題。

當 $x\to\infty$ 時 $f(x), g(x)$ 都趨近於 ∞，我們會想知道哪一個函數增長的速度比較快。很自然的便會去考慮 $f(x), g(x)$ 的比值 $\frac{f(x)}{g(x)}$。如果當 $x\to\infty$ 這個比值趨近的值大於 1（包含 ∞），則知 $f(x)$ 成長得比 $g(x)$ 快；反之若比值趨近的值小於 1 便知 $f(x)$ 成長得比 $g(x)$ 慢。當然比值趨近於 1 表示他們成長速率一樣快。由於函數的微分定義就是考慮其成長速率，所以 L'Hospital's Rule 就是這樣的概念。例如在 Example 2.3.12 (2), (3) 我們知道 $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$ 以及 $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$，所以當 x 越來越大時，e^x 的成長比 x^2 快，而 $\sqrt{x}$ 成長比 $\ln x$ 快。事實上從次數來看，我們也知道 x^2 成長比 $\sqrt{x}$ 快。

接下來我們探討其他的不定型極限問題。首先看 $0\cdot\infty$ 這種不定型，即 $\lim f(x)\cdot g(x)$，其中 $\lim f(x)=0$ 且 $\lim|g(x)|=\infty$。由於此時 $\lim\frac{1}{g(x)}=0$，所以若將 $f(x)\cdot g(x)$ 寫成 $\frac{f(x)}{1/g(x)}$，就可視為 $\frac{0}{0}$ 的不定型，用 L'Hospital's Rule 處理。同理，我們也可將 $f(x)\cdot g(x)$ 寫成 $\frac{g(x)}{1/f(x)}$，由於此時 $\lim\left|\frac{1}{f(x)}\right|=\infty$，也可將之視為 $\frac{\infty}{\infty}$ 的不定型，用 L'Hospital's Rule 處理。要注意，由於兩種看法分別牽涉到 $\frac{1}{g(x)}$ 和 $\frac{1}{f(x)}$ 的微分，所以要用哪一種看法處理取決於哪一個微分會讓問題簡化，我們看以下的例子。

Example 2.3.13. 課本 Example 4.3.8 探討 $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ 這個 $0\cdot\infty$ 不定型極限。首先觀察 $\frac{1}{x}$ 的導函數為 $\frac{-1}{x^2}$；而 $\frac{1}{\ln x}$ 的導函數為 $\frac{-1}{x(\ln x)^2}$。顯然 $\frac{1}{x}$ 較好處理，所以我們有

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

注意這裡我們用到 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}$ 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 的不定型，所以可用 L'Hospital's Rule 處理。

另外課本 Exercise 4.3.24 探討 $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x$。注意當 $x\to-\infty$ 時，$x^2\to\infty$ 而 $e^x\to 0$，所以這是 $0\cdot\infty$ 的不定型極限。然而 $\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ 的導函數 $-2x^{-3}$ 和 $\frac{1}{e^x}=e^{-x}$ 的導函數 $-e^{-x}$ 看起來都不複雜，到底要將哪一個放在分母呢？我們看一下兩種方法都套用 L'Hospital's Rule 結果如何：先將 x^2 置於分母（變成 $\frac{1}{x^2}$），套用 L'Hospital's Rule 得

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1/x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{-2x^{-3}} = \frac{1}{-2}\lim_{x\to-\infty} x^3e^x;$$

而若將 e^x 置於分母（變成 $\frac{1}{e^x}$），套用 L'Hospital's Rule 得

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1/e^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}} = -2\lim_{x\to-\infty} xe^x.$$

兩者雖然仍為 $0\cdot\infty$ 的不定型，不過第一種方法讓原來 x^2e^x 變成 x^3e^x，顯然未讓問題簡化；而第二種方法變成 xe^x，如果再套用一次就可將 x 消去。所以我們繼續下去，將 $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}$ 這個 $\frac{0}{0}$ 不定型，再套用 L'Hospital's Rule 得

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

♯

前面我們也談到 $\infty-\infty$ 這種不定型極限。亦即 $\lim(f(x)-g(x))$ 其中 $\lim f(x)=\infty$ 且 $\lim g(x)=\infty$。這種情況如果剛好 $f(x), g(x)$ 都可寫成分式，我們就可以將 $f(x)-g(x)$ 通分化簡，寫成分式的樣子再判斷其極限。例如課本 Example 4.3.10 探討 $\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x-\tan x)$。我們可以將 $\sec x-\tan x$ 寫成 $\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$。由於當 $x\to(\pi/2)^-$ 時 $(1-\sin x)\to 0$ 且 $\cos x\to 0$，故利用 L'Hospital's Rule 得

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x-\tan x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

若無法將 $f(x)-g(x)$ 寫成分式，通常會將 $f(x)$ 或 $g(x)$ 提出，例如寫成 $f(x)(1-\frac{g(x)}{f(x)})$ 看成乘法，再研判其極限。我們看以下課本的例子。

Example 2.3.14. 課本 Example 4.3.11 考慮 $\lim_{x\to\infty}(e^x-x)$ 這個 $\infty-\infty$ 的不定型極限。提出 e^x 可得 $e^x-x=e^x(1-\frac{x}{e^x})$。當 $x\to\infty$ 時 $\frac{x}{e^x}$ 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型，故用 L'Hospital's Rule 知

$\dfrac{x}{e^x} \to 0$ 因此 $x \to \infty$ 時 $e^x(1 - \dfrac{x}{e^x}) \to \infty$，亦即 $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x - x) = \infty$。注意，若是提出 x，即 $e^x - x = x(\dfrac{e^x}{x} - 1)$，依然可得趨近於 $\infty \cdot \infty$。

課本 Exercise 4.3.31 探討 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x} - x)$ 這個 $\infty - \infty$ 的不定型極限。提出 x 可得 $\sqrt{x^2+1} - x = x(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - 1)$。當 $x \to \infty$，這變成 $\infty \cdot 0$ 的不定型極限。故將 x 置於分母再利用 L'Hospital's Rule 得

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x})^{-1/2}(\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}.$$

其實這個極限也可利用根式運算處理（參考課本 Example 2.2.6 或上一章講義式子 (1.11)）。 ♯

由於指數函數的運用，還有 1^∞, ∞^0 以及 0^0 三種不定型的極限。也就是說 $\lim f(x)^{g(x)}$ 這種形式的極限，其中若 $\lim f(x) = 1$ 且 $\lim g(x) = \infty$，就是 1^∞ 的不定型。例如 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$，就屬 1^∞ 不定型。而若 $\lim f(x) = \infty$ 且 $\lim g(x) = 0$，就是 ∞^0 的不定型。例如 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$，就屬 ∞^0 不定型。最後若 $\lim f(x) = 0$ 且 $\lim g(x) = 0$，就是 0^0 的不定型。例如 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$，就屬 0^0 不定型。

為何它們是不定型呢？就拿 1^∞ 來舉例，我們知道當 $x \to \infty$，若 $0 < r < 1$ 則 $r^x \to 0$；而若 $r > 1$ 則 $r^x \to \infty$。所以若 $f(x) \to 1$，則 $f(x)$ 在趨近於 1 的過程是大於 1 或是小於 1 就會影響到 $f(x)^{g(x)}$ 的極限值。事實上，如果對 $f(x)^{g(x)}$ 取 ln，即 $\ln f(x)^{g(x)} = g(x)\cdot\ln f(x)$，我們會發現以上三種不定型的假設都會讓 $\lim(g(x)\cdot\ln f(x))$ 變成 $0\cdot\infty$ 的不定型。而處理這類型的不定型極限的方法，就是利用前述處理 $0\cdot\infty$ 的方法求出 $g(x)\cdot\ln f(x)$ 的極限，再還原成 $f(x)^{g(x)}$ 的極限。接下來我們用這個方法，處理前面所提的三個例子。

Example 2.3.15. 首先處理 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$。假設其極限為 L，利用 $\ln x$ 是連續函數，我們有 $\ln L = \lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right))$。這是 $0\cdot\infty$ 的不定型，將 x 置於分母再利用 L'Hospital's Rule 可得

$$\lim_{x\to\infty}(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^{-1}(\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

再由 $\ln L = 1$，得知極限值 $L = e^1 = e$。

同樣的處理 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$。假設其極限為 L，我們有 $\ln L = \lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+x))$。這是 $0\cdot\infty$ 的不定型，利用 L'Hospital's Rule 可得

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^{-1}(1+x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x} = 0.$$

再由 $\ln L = 0$，得知極限值 $L = e^0 = 1$。

最後處理 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$。假設其極限為 L，我們有 $\ln L = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)$。這是 $0\cdot\infty$ 的不定型，在 Example 2.3.13 （或課本 Example 4.3.8）已知其極限為 0。故由 $\ln L = 0$，得知極限值 $L = e^0 = 1$。 ♯

其實若遇到指數型的極限問題，也不需去記哪些是不定型。直接取對數 ln 再求極限。若是非不定型就可知其極限為何，而若是不定型（即 $0\cdot\infty$）就用 L'Hospital's Rule 處理。不過最後求得極限後別忘了要取指數還原。

Excecise 2.22. 請檢查以下極限是否適用 l'Hospital's rule，並求其極限：課本 Exercise 4.3 (8, 9, 12, 13, 16)。

Excecise 2.23. 利用多次套用 l'Hospital's rule 求其極限：課本 Exercise 4.3 (16, 17, 20)。

Excecise 2.24. 有時運用 l'Hospital's rule 不要整個分母或分子微分，分開來處理極限會比較容易。例如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\tan x}{x}$ 雖為 $\dfrac{0}{0}$ 不定型，但將 $\dfrac{\sin x\tan x}{x}$ 拆成 $\dfrac{\sin x}{x}\tan x$ 仍可用運用 l'Hospital's rule 處理。請求極限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\tan x}{x}$ 以及課本 Exercise 4.3.22。

Excecise 2.25. 請做課本有關 $0\cdot\infty$ 以及 $\infty-\infty$ 的極限：Exercise 4.3 (25, 26, 28, 32, 33)。

Excecise 2.26. 請做以下指數型的極限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\dfrac{2}{x})^x$。