2.3.4. 函數的迭代. 許多遞迴數列都是利用函數的迭代所形成。利用線性估計的概念 Newton's Method 就是利用迭代的方式幫助我們估計 $f(x) = 0$ 與的解。我們也介紹函數迭代所形成遞迴數列其穩定均衡點的問題。

2.3.4.1. **牛頓法.** 當函數 $f(x)$ 是連續的，若能找到 a, b 滿足 $f(a)f(b) < 0$（即 $f(a), f(b)$ 的取值異號），則由中間值定理知道 $f(x) = 0$ 在 a, b 之間有解。此時我們可以考慮將 a, b 的中點 $\frac{a+b}{2}$ 代入 $f(x)$。若恰好 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$，當然就找到 $\frac{a+b}{2}$ 為 $f(x) = 0$ 的一個解了；而若 $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$，則它一定與 $f(a), f(b)$ 其中之一異號，我們就可以繼續下去慢慢逼近 $f(x) = 0$ 的一個解。例如 $f(\frac{a+b}{2})$ 與 $f(a)$ 異號，就找 $\frac{a+b}{2}, a$ 的中點 $\frac{3a+b}{4}$ 繼續下去。這個方法就是所謂的"二分逼近法"。

牛頓法也是找解，我們可以將 $f(x) = 0$ 的解看成是函數圖形 $y = f(x)$ 與 x 軸的交點。首先在解的附近找一點 x_1，對應到函數圖形 $y = f(x)$ 上一點 $(x_1, f(x_1))$。在線性估計中，我們已經提及 $y = f(x)$ 在點 $(x_1, f(x_1))$ 的切線 $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$，在 $x = x_1$ 附近和 $y = f(x)$ 圖形相當接近。所以直線 $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ 與 x 軸的交點，應該非常接近 $y = f(x)$ 與 x 軸的交點。而直線 $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ 與 x 軸的交點是很好算的，即 $x = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} + x_1$。也就是說 $x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ 應該很接近 $f(x) = 0$ 的一個解。這就是牛頓法的基本概念。

使用牛頓法有兩點要注意，首先從剛才的推導中我們知道所選的 x_1 其微分值 $f'(x_1)$ 不能為 0（否則水平線無法和 x 軸相交），其實 $f'(x_0)$ 很接近 0 也應避免（表示與 x 軸交點會離較遠）。另外，所選的 x_1 應盡量靠近交點，否則有可能越來越遠離交點（參考課本 3.8 Figure 7 圖示）。若遇到這些情況，就應挑更好一點的 x_1。

我們可以令利用 x_1 所得切線與 x 軸的交點為 x_2，即 $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$。此時預期 x_2 更接近於 $y = f(x)$ 與 x 軸的交點，所以我們可以一直迭代下去，即令 $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \ldots$ 等。這些 x_n 所成的數列，最後極限就會是 $f(x) = 0$ 的一解。一般來講若要估計解的近似值，只要迭代後連續兩個數字 x_n, x_{n+1} 差距落在誤差範圍，就可以停下來了。

例如課本 Example 3.8.5 舉的是牛頓當初拿來解釋他的方法的例子 $f(x) = x^3 - 2x - 5$。觀察出 $f(1) = -6, f(2) = -1, f(3) = 16$，牛頓決定取 $x_1 = 2$。由於 $f'(x) = 3x^2 - 2$，數列 $\langle x_n \rangle$ 所符合的遞迴關係式為 $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$，代 $x_1 = 2$ 依序可得 $x_2 = \frac{21}{10}, x_3 = \frac{11761}{5615}$, $x_4 = \frac{4138744325037}{1975957316495}$，其中 $x_3 \approx 2.09457$ 且 $x_4 \approx 2.09455$。所以 $x^3 - 2x - 5 = 0$ 的解精準到小數點後第 4 位約為 2.0945。

2.3.4.2. **穩定均衡點.** 我們常遇到的遞迴數列是利用函數的迭代而成，亦即形如 $x_{n+1} = g(x_n)$ 這樣的遞迴數列。前面所提牛頓法估計 $f(x) = 0$ 的解，就是令 $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ 所迭代形成的遞迴數列。前一章所介紹的 logistic difference equation：$x_{n+1} = cx_n(1 - x_n)$，也是令 $g(x) = cx(1 - x)$ 所迭代形成的遞迴數列。

如果遞迴數列 $x_{n+1} = g(x_n)$ 代到某一點 x_n 後會有 $x_{n+1} = x_n$，即 $x_n = x_{n+1} = g(x_n)$，之後的點也都會等於 x_n。我們便稱 x_n 是此遞迴數列的一個"均衡點"（equilibrium）。由於 x_n 滿足 $g(x_n) = x_n$，所以我們可以直接找 $g(x)$ 的固定點（fixed point），亦即滿足 $\hat{x} = g(\hat{x})$ 的點 $\hat{x}$。

要注意當 $\hat{x}$ 是 $g(x)$ 的一個固定點，而 x_1 很靠近 $\hat{x}$，遞迴數列 $x_{n+1} = g(x_n)$ 未必會越來越靠近 $\hat{x}$，有時甚至會遠離 $\hat{x}$。所以我們有以下的定義。

Definition 2.3.16. 考慮遞迴數列 $x_{n+1} = g(x_n)$ 且 $\hat{x}$ 為其一個均衡點。如果當 x_1 很接近 $\hat{x}$ 時，x_n 會隨著 n 變大而越來越接近 $\hat{x}$，則稱 $\hat{x}$ 為"穩定均衡點"（stable equilibrium）；反之，當 x_1 很接近 $\hat{x}$ 時，x_n 會隨著 n 變大而越來越遠離 $\hat{x}$，則稱 $\hat{x}$ 為"不穩定均衡點"（unstable equilibrium）

當函數 $g(x)$ 的導函數仍為連續函數，以下的定理提供很好的方法判定遞迴數列 $x_{n+1} = g(x)$ 的均衡點是否穩定。

Theorem 2.3.17. 考慮遞迴數列 $x_{n+1} = g(x_n)$，其中 $g(x)$ 的導函數 $g'(x)$ 為連續函數。設 $\hat{x}$ 是此數列的一個均衡點。

(1) 若 $|g'(\hat{x})| < 1$，則 $\hat{x}$ 為穩定均衡點。

(2) 若 $|g'(\hat{x})| > 1$，則 $\hat{x}$ 為不穩定均衡點。

我們大致說明一下此定理的原理。因為 $g'(x)$ 為連續函數，所以若 $|g'(\hat{x})| < 1$，則 $\hat{x}$ 附近的點的微分值取絕對值也都會小於 1，因此當 x_1 夠靠近 $\hat{x}$ 時，所有在 $x_1, \hat{x}$ 之間的點 c 也會滿足 $|g'(c)| < 1$。而均值定理（Theorem 2.3.1）告訴我們存在 $x_1, \hat{x}$ 之間的一點 c 滿足 $g'(c) = \dfrac{g(x_1) - g(\hat{x})}{x_1 - \hat{x}}$，所以兩邊取絕對值並利用 $x_2 = g(x_1)$ 以及 $g(\hat{x}) = \hat{x}$，可得 $|x_2 - \hat{x}| < |x_1 - \hat{x}|$。所以繼續下去可得 $|x_{n+1} - \hat{x}| < |x_n - \hat{x}|$，甚至可得 $x_n \to \hat{x}$。同樣的原因，當 $|g'(\hat{x})| > 1$ 也可得 $|x_{n+1} - \hat{x}| > |x_n - \hat{x}|$。要注意，此定理並未提及 $|g'(\hat{x})| = 1$ 的情形，事實上在此情形無法判斷是否為穩定。另外若去掉絕對值，我們會發現當 $g'(\hat{x}) < 0$，由於負數相乘變號的原因，x_n, x_{n+1} 會在 $\hat{x}$ 兩邊跳動這種情況稱為 *oscillation*。

Example 2.3.18. 課本 Example 4.5.4 考慮 logistic difference equation：$x_{n+1} = cx_n(1-x_n)$，其中 c 為正實數。令 $g(x) = cx(1-x)$，首先我們找出所有的均衡點，即解 $g(x) = x$。由方程式 $cx^2 + (1-c)x = 0$ 解得 0 和 $1 - \dfrac{1}{c}$ 為其均衡點。

利用 $g(x)$ 的導函數 $g'(x) = c - 2cx$，我們知道對於 0 這個均衡點，由於 $g'(0) = c$，故當 $0 < c < 1$ 時，0 會是穩定均衡點，也就是此時當 x_1 很靠近 0 時，x_n 會趨近於 0。而當 $c > 1$ 時 0 不是穩定均衡點，也就是說即使 x_1 很靠近 0（但不是 0），x_n 會漸漸遠離 0（事實上當 $1 < c < 3$ 時會趨近於另一均衡點）。

接下來我們看均衡點 $1 - \dfrac{1}{c}$ 的情形。由於 $g'(1 - \dfrac{1}{c}) = 2 - c$，馬上知道當 $1 < c < 3$ 時它會是穩定均衡點，也就是此時當 x_1 很靠近 $1 - \dfrac{1}{c}$ 時，x_n 會趨近於 $1 - \dfrac{1}{c}$。注意當 $2 < c < 3$

時 $g'(1-\frac{1}{c})<0$ 所以會有 oscillation 情況發生，也就是說 x_n 會以在 $1-\frac{1}{c}$ 兩側跳動的方式趨近於 $1-\frac{1}{c}$。

最後由於 $0<c<1$ 時 $1-\frac{1}{c}$ 為不穩定均衡點，當 x_1 很靠近它時，x_n 會漸漸遠離它（事實上會趨近於穩定均衡點 0）。而當 $c>3$ 時，由於兩個均衡點都不是穩定的，所以不管 x_1 為何，x_n 都變得很難掌握。 $\sharp$

Excecise 2.27. 請做有關 Taylor polynomial 問題：課本習題 3.8.36, 3.8.38.（請參考 Week 9 講義）。

Excecise 2.28. 請做有關牛頓法問題：課本習題 3.8.21（x_3 不必化簡）。

Excecise 2.29. 請做有關均衡點穩定性問題：課本習題 4.5.5, 4.5.8

積分

之前我們利用切線斜率、成長率等概念定義了一個函數在一點的微分。相對的，我們利用面積以及總量的觀念介紹一個函數在一區間的積分。利用面積的概念推導出積分的性質與規則。利用這些規則，可以讓我們以更有效的方法的求一個函數在一區間的積分。我們將先專注於積分的性質與技巧，接著再談積分的應用。

3.1. 定積分的定義與微積分基本定理

由於長方形的面積就是底乘以高，所以要計算一個區域的面積我們可以即該區域分割成許多長方形，再將這些長方形面積加總。分割的越細所求的面積越精準，這就是利用黎曼和求函數圖形在某一區間與 x 軸所圍面積的概念。

為了方便說明，我們首先考慮函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 取值都大於等於 0 的情況。我們先將區間 $[a,b]$ 分割成許多小段，每一小段長度設為 $\triangle x_i$（例如分成 n 段，則每段長分別為 $\triangle x_1, \triangle x_2, \ldots, \triangle x_n$）。再在每一小段中任取一點 x_i^* 且取 $f(x_i^*)$ 為該段長方形的高。當 $\triangle x_i$ 越小（即分割的長方形越細），這些長方形的面積總和（稱為 *Riemann sum*）

$$f(x_1^*)\triangle x_1 + f(x_2^*)\triangle x_2 + \cdots + f(x_n^*)\triangle x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x_i \tag{3.1}$$

會越接近 $y = g(x)$ 在 $a \le x \le b$ 這一段與 x 軸所圍的面積。而當每個 $\triangle x_i$ 都趨近於 0 時，若式子 (3.1) 極限存在，此極限值確實就會是 $y = g(x)$ 在 $a \le x \le b$ 這一段與 x 軸所圍的面積。

在一般的狀況（不假設對所有 $a \le x \le b$ 皆符合 $f(x) \ge 0$）如果 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 只有有限個點不連續，則當每個 $\triangle x_i$ 都趨近於 0 時，式子 (3.1) 極限都會存在，此時稱 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 為可積（integrable），並稱式子 (3.1) 的極限值為 $f(x)$ 在 a,b 之間的定積分（definite integral of $f(x)$ from a to b），並用以下符號表示

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x_i.$$

這裡所要積分的函數 $f(x)$ 稱為 *integrand*，b,a 分別稱為上下界（upper limit, lower limit）。至於 $\mathrm{d}x$ 要注意，前面微分大致提過通常我們會用 $\triangle$ 表示差，而當 $\triangle \to 0$，我們就用 d 表示，所以這裡 $\mathrm{d}x$ 表示的就是 $\triangle x_i \to 0$。因此千萬不要忽略 $\mathrm{d}x$，長方形沒有乘上寬度，就不是面積了（以後在談積分技巧時，若忽略 $\mathrm{d}x$ 會造成嚴重的錯誤）。最後取極限時再把表示和的 $\sum$ 符號改成大 S，即 $\int$ 來表示。注意 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 不一定是 $y = g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 這一段與 x 軸所圍的面積，因為 $f(x_i^*)$ 在取值時有可能是負的，所以計算長方形面積時會有正負抵消的問題。因此在一般情況需將 integrand 取絕對值，求 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 才會是 $y = g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 這一段與 x 軸所圍區域的面積。

要如何求定積分呢？既然需要考慮 $\triangle x_i \to 0$ 的情況，一般最常用的方法就是將區間 $[a,b]$ 等分成 n 等分再讓 $n \to \infty$ 即可。因為此時 $\triangle x_i = \dfrac{b-a}{n}$，所以當 $n \to \infty$，自然會有 $\triangle x_i \to 0$。至於每一個分段中 x_i^* 要如何選呢？既然定理說任意選都會有一樣的極限值，一般都會用比較有系統的方式選 x_i^*。例如在每段 $[x_{i-1}, x_i]$ 選右端點 x_i，這樣算的黎曼和稱為 *right Riemann sum*；而若 x_i^* 選的分別是 $[x_{i-1}, x_i]$ 的左端點 x_{i-1}、中點 $\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$，則算出的黎曼和分別稱為 *left Riemann sum* 和 *midpoint Riemann sum*。其實在證明這些 Riemann sum 都會趨近於同一個值，使用的方法是選 x_i^* 會使得 $f(x_i^*)$ 是在區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 的最大值，這樣算出的黎曼和稱為 *upper Riemann sum*。而若選 x_i^* 會使得 $f(x_i^*)$ 是在區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 的最小值，這樣算出的黎曼和稱為 *lower Riemann sum*。由於當 $\triangle x_i \to 0$ 時 upper Riemann sum 和 lower Riemann sum 會趨近於同一個值，所以利用夾擠定理，就可以得到前面所提各種算法所得的 Riemann sum 都會趨近於同一個值。接下來我們看幾個用 Riemann sum 求定積分的例子。

Example 3.1.1. 令 $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$。我們分別利用 right Riemann sum, left Riemann sum 以及 midpoint Riemann sum 求 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ 以及 $\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x$. 先將區間 $[0,2]$ 等分成 n 等分，即每一等分長 $\triangle x_i = \dfrac{2}{n}$。依序分成的 n 個區間為

$$[0,\frac{2}{n}],[\frac{2}{n},\frac{4}{n}],\dots,[\frac{2(i-1)}{n},\frac{2i}{n}],\dots,[\frac{2(n-1)}{n},2].$$

每一段若選右端點則依序所選的點為 $\frac{2}{n},\frac{4}{n},\dots,\frac{2i}{n}\dots,2$；若選左端點則依序所選的點為 $0,\frac{2}{n},\dots,\frac{2(i-1)}{n}\dots,\frac{2(n-1)}{n}$；而若選中點則依序所選的點為 $\frac{1}{n},\frac{3}{n},\dots,\frac{2i-1}{n}\dots,\frac{2n-1}{n}$。

(1) 由於 $f(x) = 1$ 是常數，無論選哪一點其值皆為 1，故三種 Riemann sum 皆為 $\sum_{i=1}^{n}(1\cdot\frac{2}{n}) = n\cdot\frac{2}{n} = 2$, 與 n 無關，故當 $n \to \infty$ 極限仍為 2。即

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 1\,\mathrm{d}x = 2.$$

此與 $y = 1$ 和 x 軸在 $[0,2]$ 所圍區域為長為 2 寬為 1 的長方形面積 2 相符。

(2) 由 $g(x) = x$，利用前述三種點的選法，我們得 right Riemann sum, left Riemann sum 以及 midpoint Riemann sum 依序為

$$\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n} + \frac{4}{n} + \cdots + \frac{2i}{n} + \cdots + 2\right) = \frac{2}{n}\left(\frac{n(\frac{2}{n} + 2)}{2}\right) = \frac{2 + 2n}{n},$$

$$\frac{2}{n}\left(0 + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{2(i-1)}{n} + \cdots + \frac{2(n-1)}{n}\right) = \frac{2}{n}\left(\frac{n(0 + \frac{2(n-1)}{n})}{2}\right) = \frac{2(n-1)}{n},$$

$$\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{2i-1}{n} + \cdots + \frac{2n-1}{n}\right) = \frac{2}{n}\left(\frac{n(\frac{1}{n} + \frac{2n-1}{n})}{2}\right) = 2.$$

注意，這裡我們用到了等差級數的公式。不管是哪一種 Riemann sum，當 $n \to \infty$ 其極限皆為 2，故得

$$\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2.$$

此與 $y = x$ 和 x 軸在 $[0, 2]$ 所圍區域為底為 2 高為 2 的直角三角形面積相符。

(3) 由 $h(x) = x^2$，利用前述三種點的選法，我們得 right Riemann sum, left Riemann sum 以及 midpoint Riemann sum 依序為

$$\frac{2}{n}\left((\frac{2}{n})^2 + (\frac{4}{n})^2 + \cdots + (\frac{2i}{n})^2 + \cdots + 2^2\right) = \frac{8}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) = \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\frac{2}{n}\left(0 + (\frac{2}{n})^2 + \cdots + (\frac{2(i-1)}{n})^2 + \cdots + (\frac{2(n-1)}{n})^2\right) = \frac{8}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\right) = \frac{8}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

$$\frac{2}{n}\left((\frac{1}{n})^2 + (\frac{3}{n})^2 + \cdots + (\frac{2i-1}{n})^2 + \cdots + (\frac{2n-1}{n})^2\right) = \frac{2}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2\right) = \frac{2}{n^3}\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3},$$

注意，這裡我們用到了平方和的公式 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 以及 $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$。不管是哪一種 Riemann sum，當 $n \to \infty$ 其極限皆為 $\dfrac{8}{3}$，故得

$$\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}.$$

也就是說拋物線 $y = x^2$ 和 x 軸在 $[0, 2]$ 所圍區域面積為 $\dfrac{8}{3}$。 ♯

從這些例子來看，若要求更高次的定積分，將會越來越複雜。所以一般來說不可能都用黎曼和的定義求定積分。微積分基本定理可以讓我們簡化求定積分的工作。

Theorem 3.1.2 (The Fundamental Theorem of Calculus)**.** 假設函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 連續，且存在 $F(x)$ 滿足對所有 $x \in [a, b]$ 皆有 $F'(x) = f(x)$。則

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Proof. 首先將區間 $[a,b]$ 依序分割成 $a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ 共 n 段，令每一段長 $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$。利用 mean value theorem （Theorem 2.3.1），在區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 之間存在一點 x_i^* 滿足 $F'(x_i^*) = \dfrac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$，亦即 $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(x_i^*)\triangle x_i$。也因此在此分割之下，若每個分割都選 x_i^* 則所得的 Riemann sum 為

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x_i &= f(x_1^*)\triangle x_1 + f(x_2^*)\triangle x_2 + \cdots + f(x_n^*)\triangle x_n \\ &= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + \cdots + (F(x_n) - F(x_{n-1})) \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

由於這樣的選取法都會是定值 $F(b) - F(a)$，故當 $\triangle x_i \to 0$ 時其黎曼和極限為 $F(b) - F(a)$。因此得證

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x_i = F(b) - F(a).$$

□

微積分基本定理有許多形式，Theorem 3.1.2 一般稱為第二型（Part 2）或 *evaluation theorem*。我們先介紹它主要就是它能幫助我們求定積分。也就是說如果知道什麼函數的導函數是 $f(x)$，就可求 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$。例如 Example 3.1.1 中我們知道 $F(x) = x$ 的導函數是 $f(x) = 1$，所以 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = 2 - 0 = 2$。同理由於 $G(x) = \frac{1}{2}x^2$ 和 $H(x) = \frac{1}{3}x^3$ 的導函數分別為 $g(x) = x$ 以及 $h(x) = x^2$，所以

$$\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = G(2) - G(0) = \frac{4}{2} = 2, \quad \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = H(2) - H(0) = \frac{8}{3}.$$

所以要求定積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，我們只要找到 $F(x)$ 滿足 $F'(x) = f(x)$ 即可。這個 $F(x)$ 稱為 $f(x)$ 的“反導函數”(antiderivative)，由於反導函數與積分相關且為了方便起見，我們用“不定積分”(indefinite integral) $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 來表示 $f(x)$ 的反導函數。下一節我們將談論求不定積分的技巧，在此之前我們順便談談微積分基本定理其他的形式。

由於 $F(x)$ 本身是 $F'(x)$ 的反導函數所以由 Theorem 3.1.2 我們得

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{3.2}$$

式子 (3.2) 常被稱為 *net change theorem*。課本 Example 5.3.7 提到：若 $N(t)$ 表示在時間 t 的人口數，則 $N'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)$ 表示人口成長率。所以我們可以由人口成長率的定積分 $\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)\,\mathrm{d}t = N(t_2) - N(t_1)$ 得到從 t_1 到 t_2 這段時間人口的“淨變化”(net change)。

當 $f(x)$ 為區間 $[a,b]$ 上的連續函數且 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數。對任意 $x \in [a,b]$ 考慮新的函數 $g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$。依 Theorem 3.1.2，我們有 $g(x) = F(x) - F(a)$，所以 $g'(x) = F'(x) = f(x)$ 對任意 $x \in [a,b]$ 皆成立。這就是所謂第一型（part 1）的微積分基本定

理。通常寫成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x). \tag{3.3}$$

注意積分式改為以 t 為變數，以免和上界的 x 混淆。

課本 Example 5.3.11 要求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^4} \sec t\,\mathrm{d}t$。我們可以先令 $g(x) = \int_1^x \sec t\,\mathrm{d}t$。也因此利用 chain rule 以及 $g'(x) = \sec x$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^4} \sec t\,\mathrm{d}t = (g(x^4))' = g'(x^4)\cdot(x^4)' = 4x^3\cdot\sec x^4.$$

3.2. 積分的技巧

一般來說，要找到反導函數並不容易。我們首先介紹不定積分的基本性質，並依此得到一些基本函數相關的反導函數。不過再複雜一點的函數就必需藉由變換變數、分部積分以及部分分式等技巧處理。

首先要注意的是反導函數並不唯一。若 $F_1(x), F_2(x)$ 都滿足 $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$，此時由於 $(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$，利用 Theorem 2.3.2 (3) 可知 $F_1(x) - F_2(x)$ 為常數 C。也就是當我們找到 $f(x)$ 的一個反導函數 $F(x)$，自然就找到所有的反導函數，也因此通常我們會用 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ 來表示。例如 $\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C$。不過由於在求定積分時 $F(b) - F(a)$ 會把常數 C 扣掉，所以不管選哪個反導函數，所得定積分是一致的。為了方便起見本講義在寫不定積分等式時會省略常數 C。不過以後處理微分方程時，由於會有初始值問題，求反導函數時需要用到常數 C，那時這個 C 就不能忽略了。

對於可微函數 $f(x)$，由於 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的導函數，所以 $f(x)$ 會是 $f'(x)$ 的反道函數。利用不定積分就是反導函數的符號定義，可得

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x). \tag{3.4}$$

注意式子 (3.4) 是不定積分符號的定義，不能視為微積分基本定理。

不定積分也有線性性質。這是因為導函數有線性性質，自然可得反導函數也有線性性質，亦即

$$\int (r\cdot f(x) + s\cdot g(x))\,\mathrm{d}x = r\int f(x)\,\mathrm{d}x + s\int g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

這告訴我們，如果知道 $f(x), g(x)$ 的反導函數，就可以得到 $r\cdot f(x) + s\cdot g(x)$ 的反導函數。我們先推導 power function 的反導函數。對於任意實數 r，考慮 power function $f(x) = x^{r+1}$。我們已知其導函數為 $f'(x) = (r+1)x^r$。因此由式子 (3.4),(3.5) 知 $x^{r+1} = f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = (r+1)\int x^r\,\mathrm{d}x$。因此當 $r \neq -1$ 時，可得

$$\int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}x^{r+1}. \tag{3.6}$$

特別的，對於任意自然數 k，由於 $\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1}$，利用線性性質可得任意多項式的反導函數

$$\int (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)\,\mathrm{d}x = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x. \tag{3.7}$$

例如 $3x^2-4x+2$ 的反導函數為

$$\int(3x^2-4x+2)\,\mathrm{d}x = 3\int x^2\,\mathrm{d}x - 4\int x\,\mathrm{d}x + 2\int 1\,\mathrm{d}x = x^3-2x^2+2x.$$

式子 (3.6) 談的是當 $r\neq -1$ 時 x^r 的反導函數。當 $r=-1$，即 $x^{-1}=\frac{1}{x}$，其反導函數為何？我們知道 $\ln x$ 的導函數是 $\frac{1}{x}$。不過這是在 $x>0$ 的情況，因為當 $x\leq 0$ 時 $\ln x$ 是沒有定義的。不過 $\frac{1}{x}$ 在 $x<0$ 是有定義的，所以我們自然想知道當 $x<0$ 時 $\frac{1}{x}$ 的反導函數為何？當 $x<0$ 時 $f(x)=\ln(-x)$ 是有定義的。此時利用 chain rule 可得 $f'(x)=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{x}$。也就是說當 $x<0$ 時 $\ln(-x)$ 會是 $\frac{1}{x}$ 的反導函數。由於 $\ln|x|$ 在 $x>0$ 時等於 $\ln x$；而當 $x<0$ 時等於 $\ln(-x)$，所以通常我們會以 $\ln|x|$ 來表示 $\frac{1}{x}$ 的反導函數（對於所有 $x\neq 0$ 皆適用），亦即

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| \tag{3.8}$$

注意微積分基本定理（Theorem 3.1.2）處理定積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 需要求 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 為連續。由於 $\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 不連續，所以當 $a<0<b$ 時我們不能用式子 (3.8) 處理 $\int_a^b\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|b|-\ln|a|$。這牽涉所謂“瑕積分”的問題（以後會談）。不過若 a,b 同號，就可以了！

我們可以利用一些基本函數的導函數反推得到一些基本函數的反導函數，再利用線性的性質得到它們之間線性組合的反導函數。以下我們列出一些利用導函數推得的常見函數的反導函數。

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x,\qquad \int a^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\,a^x. \tag{3.9}$$

$$\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x,\quad \int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x,\quad \int\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\tan x,\quad \int\sec x\tan x\,\mathrm{d}x=\sec x \tag{3.10}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\sin^{-1}x,\qquad \int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\tan^{-1}x. \tag{3.11}$$

注意，這裡沒有 $\ln x$, $\tan x$, $\sec x$ 的反導函數（因為它們沒有辦法直接由簡單的函數微分得到），等到以後學會積分的技巧後，才容易求得。

Excecise 3.1. 將以下 Riemann Sum 寫成定積分：課本習題 5.2 (15, 16, 17, 18)。

Excecise 3.2. 利用微積分基本定理求以下定積分：課本習題 5.3 (1, 11, 13)。