3.2.1. 變換變數. 合成函數的導函數有 chain rule 幫我們推導，反之和合成函數相關的求反導函數的方法就是變換變數（substitution rule），它是與 chain rule 相關的。

當我們看到一個積分式裡面積分的函數有“一部分”像是合成函數時，可以嘗試看看它是否是合成函數的導函數。明確來說，若看到積分的函數（integrand）是 $f(g(x))\cdot h(x)$ 的形式，若又知 $f(x)$ 的反導函數為 $F(x)$，則考慮函數 $F(g(x))$ 的導函數，即利用 chain rule 我們有 $F'(g(x))g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$。也就是說 $F(g(x))$ 會是 $f(g(x))\cdot g'(x)$ 的反導函數，所以若 $h(x)$ 恰為 $g'(x)$，依積分定義得

$$\int f(g(x))h(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)).$$

例如看到積分式 $\int \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$ 中 $\sqrt{\sin x}$ 可視為合成函數 $f(g(x))$，其中 $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ 且 $g(x) = \sin x$。而我們知 $f(x) = x^{1/2}$ 的反導函數為 $F(x) = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$ 又 $g'(x) = (\sin x)' = \cos x$，所以知 $\int \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x = F(g(x)) = \dfrac{2}{3}(\sin x)^{3/2}$。

從這個概念，我們介紹所謂變換變數的積分技巧。當我們看到積分的函數中有合成函數的“成分”$f(g(x))$（例如課本 Example 5.4.1 $\int x^3\cos\left(x^4+2\right)\mathrm{d}x$ 中的 $\cos\left(x^4+2\right)$）。可變換變數令 $u = g(x)$（上例中令 $u = x^4+2$）。接著將 $u = g(x)$ 對 x 微分，即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x)$，寫成 $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$（上例中 $\mathrm{d}u = 4x^3\mathrm{d}x$）。然後利用這個 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}x$ 的關係式將整個積分寫成僅與 u 有關的形式 $\int f(u)\,\mathrm{d}u$，不能有 x（上例中 $x^3\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\mathrm{d}u$ 故 $\int x^3\cos\left(x^4+2\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\int\cos u\,\mathrm{d}u$）。若知道 $f(u)$ 的反導函數為 $F(u)$（上例中 $\cos u$ 的反導函數是 $\sin u$），最後利用 $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) = F(g(x))$ 求出整個反導函數（上例中得 $x^3\cos\left(x^4+2\right)$ 的反導函數為 $\dfrac{1}{4}\sin u = \dfrac{1}{4}\sin\left(x^4+2\right)$）。

這個變換變數的技巧有幾件事要注意。首先就是所設新的變數 $u = g(x)$ 不必知道其反導函數為何，但必需正確求其導函數並寫成 $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ 的形式才能正確完成變換變數。過去我們一再強調微分和積分千萬不要漏掉 $\mathrm{d}x$ 就是這個原因。接著切記一定要將原積分寫成 $\int f(u)\,\mathrm{d}u$（可能差個倍數）而且必需知道 $f(x)$ 反導函數才算完成。最後別忘了把 u 換回 $g(x)$。我們看以下的例子。

Example 3.2.1. 課本 Example 5.4.3 求 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}x$。這個例子，看到 $\sqrt{1-4x^2}$，很多人會誤以為 $f(x) = \sqrt{x}$，然後設 $u = 1-4x^2$，得 $\mathrm{d}u = -8x\,\mathrm{d}x$。故由 $x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{8}\mathrm{d}u$ 得原積分為 $\displaystyle -\frac{1}{8}\int\frac{1}{f(u)}\mathrm{d}u$，而誤以為求出反導函數為 $-\dfrac{1}{8}\ln|f(u)| = -\dfrac{1}{8}\ln\sqrt{1-4x^2}$。這裡最大的問題是 $\displaystyle\int\frac{1}{f(u)}\mathrm{d}u$ 不是 $\ln|f(u)|$（應該是 $\displaystyle\int\frac{f'(u)}{f(u)}\mathrm{d}u$ 才會是 $\ln|f(u)|$）。

我們建議不必先急著決定 $f(x)$ 為何，先決定 $u = 1-4x^2$ 後，如前面說明所述，先利用 $\mathrm{d}u = -8x\,\mathrm{d}x$ 將 $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}x$ 完全用新變數 u 來表示，即 $\displaystyle -\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$。再決定是否會求此不定積分。事實上 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \int u^{-1/2}\mathrm{d}u = 2u^{1/2}$，故求得反導函數為 $-\dfrac{1}{8}(2\sqrt{u}) = -\dfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ ♯

不要誤以為積分函數是兩個函數相乘才能用變換變數。事實上若變數是一次多項式 $u = ax + b$，則 $\mathrm{d}u = a\mathrm{d}x$ 就不會出現兩個函數相乘的形式。例如課本 Example 5.4.2 $\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$ 就需設 $u = 2x+1$，得 $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$ 而變換變數成 $\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du$。因此得反導函數為 $\frac{1}{3}u^{3/2} = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}$。同樣的，課本 Example 5.4.4 $\int e^{5x}\,\mathrm{d}x$ 就需設 $u = 5x$，得 $\mathrm{d}u = 5\mathrm{d}x$ 而變換變數成 $\int e^{5x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int e^{u}du$。因此得反導函數為 $\frac{1}{5}e^{u} = \frac{1}{5}e^{5x}$。

接下來看前面提過 $\tan x, \sec x$ 的反導函數。

Example 3.2.2. 首先我們看 $\int \tan x\,\mathrm{d}x$。利用 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$，知等同於要求 $\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$。若設 $u = \cos x$，得 $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$。故原積分式變成 $-\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\ln|u| = \ln\frac{1}{|u|} = \ln|\sec x|$。我們求得了 $\tan x$ 的反導函數是 $\ln|\sec x|$，亦即

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x|. \tag{3.12}$$

接下來我們看 $\int \sec x\,\mathrm{d}x$。這雖然也用變換變數處理，不過技巧性更高。首先我們觀察 $\mathrm{d}\sec x = \sec x\tan x\,\mathrm{d}x$ 以及 $\mathrm{d}\tan x = \sec^2 x\,\mathrm{d}x$。也就是說若設 $u = \sec x + \tan x$，則 $\mathrm{d}u = \sec x(\tan x + \sec x)\,\mathrm{d}x = \sec x \cdot u\,\mathrm{d}x$。也就是說 $\sec x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{u}\mathrm{d}u$，因此

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln|u| = \ln|\sec x + \tan x|. \tag{3.13}$$

♯

當處理定積分時，我們會先求不定積分（即反導函數）再利用微積分基本定理，代上下界求得積分值。不過若在求不定積分時用到了變換變數，我們不必回求反導函數，直接用新的變數寫成定積分求值即可。我們看以下例子。

Example 3.2.3. 課本 Example 5.4.7 求 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(3-5x)^2}$。利用變換變數 $u = 3-5x$，則 $\mathrm{d}u = -5\,\mathrm{d}x$，故 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int u^{-2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{5}u^{-1}$。接下來我們有兩個做法。第一個是將 $u = 3-5x$ 代回得反導函數 $\frac{1}{5(3-5x)}$，再代上下界，即

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(3-5x)^2} = \frac{1}{5(3-5x)}\Big|_1^2 = \frac{1}{5(-7)} - \frac{1}{5(-2)} = \frac{-2+7}{70} = \frac{1}{14}.$$

或是直接寫成以 u 為變數的定分，將上、下界 $x = 2$、$x = 1$ 利用 $u = 3-5x$ 分別改為 $u = -7$、$u = -2$，即

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} u^{-2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{5}u^{-1}\Big|_{-2}^{-7} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{-7} - \frac{1}{-2}\right) = \frac{1}{14}.$$

♯

Excecise 3.3. 請利用 net change theorem（參考上週講義）回答以下問題：課本 Exercise 5.3.47, 5.3.52, 5.3.55.

Excecise 3.4. 請用變數變換做以下積分：課本 Exercise 5.4.6, 5.4.11, 5.4.13, 5.4.23, 5.4.28, 5.4.31($u = 2x + 5$，記得把 x 換成 u), 5.4.33(利用 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$), 5.4.36(設 $u = x^2$)。

Excecise 3.5. 請用新的變數寫出上下界的方式處理以下定積分：5.4.37, 5.4.44, 5.4.47(設 $u = x - 1$), 5.4.49, 5.4.51(設 $u = 1 + \sqrt{x}$)。