3.2.2. 分部積分. Integration by parts（分部積分）來自於微分的乘法性質。基本上，若積分的函數是兩個函數相乘，且知道其中一個函數的反導函數，就可考慮使用分部積分求出乘在一起的反導函數。

我們直接看分部積分處理積分的方法。考慮不定積分 $\int f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$。若知道 $g(x)$ 的反導函數為 $G(x)$，此時我們可設 $u=f(x),\ v=G(x)$。因為 $\mathrm{d}v=G'(x)\,\mathrm{d}x=g(x)\,\mathrm{d}x$，所以原式可寫成 $\int f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x=\int u\,\mathrm{d}v$。回顧微分的乘法性質 $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'=v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。若用微積分基本定理寫成積分形式為

$$u\cdot v=\int(u\cdot v)'\,\mathrm{d}x=\int(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x})\,\mathrm{d}x+\int(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x})\,\mathrm{d}x=\int v\,\mathrm{d}u+\int u\,\mathrm{d}v.$$

也因此

$$\int f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x=\int u\,\mathrm{d}v=u\cdot v-\int v\,\mathrm{d}u=f(x)\cdot G(x)-\int G(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

也就是說，我們把 $\int f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$ 轉換成 $\int G(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$。若能知道 $G(x)\cdot f'(x)$ 的反導函數就可求出 $f(x)\cdot g(x)$ 的反導函數。

求積分時，設好 u,v，使得原積分為 $\int u\,\mathrm{d}v$，利用 $\int v\,\mathrm{d}u$ 的積分得

$$\int u\,\mathrm{d}v=u\cdot v-\int v\,\mathrm{d}u \tag{3.14}$$

就是分部積分的技巧。

Example 3.2.4. 課本 Example 5.5.1 求 $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$。由於我們知道 $\sin x$ 的反導函數為 $-\cos x$，所以可設 $u=x, v=-\cos x$。因此由 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ 以及式子 (3.14) 得

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x=\int u\,\mathrm{d}v=u\cdot v-\int v\,\mathrm{d}u=-x\cos x-\int(-\cos x)\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x.$$

注意分部積分的重點就是要設定好 u,v 使得原本不知反導函數的積分 $\int u\,\mathrm{d}v$ 轉換成已知反導函數的 $\int v\,\mathrm{d}u$。不是只要找到 u,v 就一定可用分部積分處理。例如本例題若因知道 x 的反導函數為 $\frac{1}{2}x^2$ 而設 $u=\sin x, v=\frac{1}{2}x^2$，此時 $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$ 仍等於 $\int u\,\mathrm{d}v$ 也因此由 $\mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x$ 得

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x=\int u\,\mathrm{d}v=u\cdot v-\int v\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}x^2\sin x-\frac{1}{2}\int(x^2\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

雖然這個積分式仍然正確，但由於我們不知 $\int v\,\mathrm{d}u$（即 $\int(x^2\cos x)\,\mathrm{d}x$）為何，所以這個設定法，無法讓我們用分部積分處理原積分。 $\sharp$

從 Example 3.2.4 我們知道在利用分部積分處理積分時，應注意所設的 u,v 是否能幫助我們處理積分，若無助於處理問題就應換另一組 u,v。另外若積分的函數為 $x^n\cdot g(x)$ 的形式，且知 $g(x)$ 的反導函數為 $G(x)$，則令 $u=x^n, v=G(x)$ 是可行的選擇。因為此時 $\mathrm{d}u=nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$，所以若用此組設定可將 $\int x^n\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$ 轉換成處理 $\int v\,\mathrm{d}u=n\int x^{n-1}G(x)\,\mathrm{d}x$，由於 x 的次數變小了，也因此簡化了積分的難度（通常可繼續下去直到 x 項消失）。我們看以下例子。

Example 3.2.5. 課本 Example 5.5.3 求 $\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$。由於 e^x 的反導函數為 e^x，所以依前述建議令 $u=x^2$ 以及 $v=e^x$。由於 $\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$ 故得

$$\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2\int xe^x\,\mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

雖然我們依然不知 $\int xe^x\,\mathrm{d}x$，不過可以再設一次 $u=x$ 以及 $v=e^x$。由於 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ 故得

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x. \tag{3.16}$$

因此合併式子 (3.15), (3.16) 得 $\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x.$ ♯

從這個例子我們知道，有時分部積分需要處理好幾次才能完成。有時甚至，處理一次後看不出將積分簡化了，不過再做一次有可能因為積分的等式求出反導函數。我們看以下例子。

Example 3.2.6. 課本 Example 5.5.4 求 $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$。課本令 $u=e^x$ 以及 $v=-\cos x$ 處理，不過這裡我們用 $u=\sin x$, $v=e^x$ 處理，讓大家了解兩種設法都可以。依我們得設法，由於 $\mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x$ 故得

$$\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x. \tag{3.17}$$

雖然我們依然不知 $\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$，而且看似新的積分與原積分複雜度相同。不過我們再設一次 $u=\cos x$ 以及 $v=e^x$。由於 $\mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x$ 故得

$$\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = e^x\cos x - (-\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x) = e^x\cos x + \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x. \tag{3.18}$$

因此合併式子 (3.17), (3.18) 得

$$\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = e^x\sin x - (e^x\cos x + \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x) = (e^x\sin x - e^x\cos x) - \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x,$$

再移項得 $2\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = e^x\sin x - e^x\cos x$，因此得 $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$. 有趣的是，我們也可利用式子 (3.18) 再用式子 (3.17) 得到 $\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$. ♯

雖然分部積分來自於微分的 product rule，不過有時積分函數未必是乘法形式，也能用分部積分處理。例如 $\ln x$ 的反導函數 $\int \ln x\,\mathrm{d}x$。因為 1 的反導函數是 x，我們可設 $u=\ln x$, $v=x$。此時 $\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$，故利用分部積分得

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln x - x.$$

這裡有趣的是反函數和合成有關，但它的積分並不是用和 chain rule 有關的變換變數處理。接下來我們看另兩個反函數 $\sin^{-1}x, \tan^{-1}x$ 的反導函數，也是用同樣方法分部積分處理，不過還要搭配變換變數才能完成。也因此要記住，有時積分需要多個步驟且搭配不同的方法處理。

Example 3.2.7. 我們先處理 $\int \sin^{-1} x \,\mathrm{d}x$。利用 $u = \sin^{-1} x$ 以及 $v = x$，因 $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$，我們有

$$\int \sin^{-1} x \,\mathrm{d}x = x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x. \tag{3.19}$$

接下來用變換變數處理 $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$，即設 $u = 1 - x^2$，因 $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$，故

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u = -u^{1/2} = -\sqrt{1-x^2}. \tag{3.20}$$

合併式子 (3.19), (3.20) 可得

$$\int \sin^{-1} x \,\mathrm{d}x = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}.$$

對於 $\int \tan^{-1} x \,\mathrm{d}x$。同樣設 $u = \tan^{-1} x$ 以及 $v = x$，因 $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，我們有

$$\int \tan^{-1} x \,\mathrm{d}x = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{3.21}$$

接下來用變換變數處理 $\int \dfrac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，即設 $u = 1 + x^2$，因 $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$，故

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u^{-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right). \tag{3.22}$$

合併式子 (3.21), (3.22) 可得

$$\int \tan^{-1} x \,\mathrm{d}x = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).$$

♯

最後我們要說明，分部積分雖然設 u, v，但它不是變換變數（沒有將整個積分式變成 u 的函數或 v 的函數的積分）。所以在處理定積分時若用到分部積分，不能如變換變數將上下界換成 u 或 v 來處理。只能求出反導函數（不定積分）再代原上下界來處理。例如課本 Example 5.5.6 求定積分 $\int_0^1 \tan^{-1} x \,\mathrm{d}x$。我們利用 Example 3.2.7 所得 $\tan^{-1} x$ 的反導函數 $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ 代上下界得

$$\int_0^1 \tan^{-1} x \,\mathrm{d}x = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = (1\tan^{-1}(1) - 0) - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

3.2.3. 部分分式與查表. Partial Fractions 針對的是分式的積分，我們稱為部分分式意指將分式利用代數方法寫成一些簡單分式之和，而這些簡單分式很容易得到反導函數。我們也會簡單介紹使用查表求定積分的方法。

當我們要處理有理多項式（簡稱分式）的積分 $\int \dfrac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$，其中 $f(x), g(x)$ 為多項式。首先注意 $f(x)$ 的次數是否小於 $g(x)$ 的次數。若 $\deg f(x) \geq \deg g(x)$，則利用長除法將 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 寫成 $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$ 其中 $h(x)$ 為商式、$r(x)$ 為餘式，即 $\deg r(x) < \deg g(x)$。此時

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{h(x)g(x) + r(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int h(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{3.23}$$

例如課本 Example 5.6.1 求 $\int \frac{x^3+x}{x-1}\,\mathrm{d}x$。由於分子次數比較大，利用長除法 $x^3+x=(x-1)(x^2+x+2)+2$ 得

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int (x^2+x+2)\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1|.$$

在式子 (3.23) 的積分中，因為 $h(x)$ 是多項式，它的反導函數容易求得。所以我們只要會處理 $\frac{r(x)}{g(x)}$ 的反導函數即可。因此以下我們只專注於分式的積分其中分子的次數小於分母次數的情況，也就是說我們討論的分式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 皆假設 $\deg f(x) < \deg g(x)$。

我們先討論最簡單的一種情況，即分母可完全分解成一次式且無重根。此時若 $\deg f(x) < \deg g(x)$ 且 $g(x) = (a_1x+b_1)\cdots(a_n+b_n)$，則 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 可用部分分式寫成

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c_1}{a_1x+b_1} + \cdots + \frac{c_n}{a_nx+b_n}.$$

因為部分分式的每一項皆為 $\frac{c}{ax+b}$ 的形式，所以可以用變換變數 $u=ax+b$，得 $\mathrm{d}u = a\mathrm{d}x$，因此 $\int \frac{c}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{c}{a}\int\frac{1}{u} = \frac{c}{a}\ln|u| = \frac{c}{a}\ln|ax+b|$。也因此利用積分線性性質就可求出 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的反導函數了。

Example 3.2.8. 課本 Example 5.6.3 求 $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,\mathrm{d}x$。首先分子次數確實小於分母次數。接著將分母分解成 $2x^3+3x^2-2x = x(2x-1)(x+2)$，沒有重根所以可寫成部分分式

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{2x-1} + \frac{c_3}{x+2}.$$

我們必需決定 c_1, c_2, c_3 的值。將右式通分，比較左右式的分母得

$$x^2+2x-1 = c_1(2x-1)(x+2) + c_2x(x+2) + c_3x(2x-1).$$

我們可以將右式展開，比較係數解聯立方程得 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{5}, c_3 = -\frac{1}{10}$。比較簡單的方法是利用 $x, 2x-1, x+2$ 的根分別為 $0, \frac{1}{2}, -2$，將它們分別帶入上式，分別得 $-1=-2c_1$, $\frac{1}{4} = \frac{5}{4}c_2$ 以及 $-1 = 10c_3$，故知 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{5}, c_3 = -\frac{1}{10}$。因此原積分為

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int\frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{10}\int\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2|.\end{aligned}$$

注意，其中 $\int \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x, \int\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$ 我們分別用變換變數 $u=2x-1$, $u=x+2$，得反導函數分別為 $\frac{1}{2}\ln|2x-1|$ 以及 $\ln|x+2|$。 ♯

第二種情況，即分母可完全分解成一次式但有重根。此時寫成部分分式時無重根部分和前面一樣；而重根部分例如為 $(ax+b)^k$，則可寫成 $\frac{c_1}{ax+b} + \frac{c_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{c_k}{(ax+b)^k}$。我們看以下例子。

Example 3.2.9. 課本 Exercise 5.6.19 求 $\int \frac{5x^2+3x-2}{x^2(x+2)}\,\mathrm{d}x$。$x+2$ 是無重根部分，而 x^2 有重根，故原分式可寫成部分分式 $\frac{5x^2+3x-2}{x^2(x+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$。右式通分比較分子可得 $5x^2+3x-2 = ax^2 + bx(x+2) + c(x+2)$。代 $x=0,-2$ 分別得 $c=-1, a=3$。再任意代一個數例如 $x=1$，可得 $b=2$，故得

$$\int \frac{5x^2+3x-2}{x^2(x+2)}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x+2| + 2\ln|x| + \frac{1}{x}.$$

♯

比較複雜的情況是分母無法完全分解成一次式的情況。要注意，由代數基本定理以及虛根成對定理，這表示分母有虛根 $a+bi$ 和 $a-bi$，也因此可分解出 $(x-a)^2+b^2$ 這種形式的二次式。當分母有這樣的因式且 $a+bi$ 無重根，則這部分的部分分式可寫成 $\frac{cx+d}{(x-a)^2+b^2}$。我們直接看一個例子。

Example 3.2.10. 課本 Exercise 5.6.22 求 $\int \frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x$。$x^2+1$ 無法再分解，故原分式可寫成部分分式 $\frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$。右式通分比較分子可得 $3x^2-2x+3 = a(x^2+1) + (cx+d)(x-1)$。代 $x=1$ 得 $a=2$。再任意代兩個數例如 $x=0, x=-1$（或直接展開比較係數），可得 $c=1, d=-1$，故得

$$\int \frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| + \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

由於 $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \tan^{-1} x$，而 $\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ 利用變換變數 $u = x^2+1$，由 $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ 可得

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right).$$

故解得

$$\int \frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \tan^{-1} x.$$

♯

Excecise 3.6. 當積分的函數是 $f(x) \cdot g(x)$ 其中 $f(x)$ 是多項式，$g(x)$ 不是對數有關的函數，則可令 $u = f(x)$ 然後用分部積分處理。求以下積分：

$$\text{(5.5.7)} \int x^2 \sin \pi x \, \mathrm{d}x; \qquad \text{(5.5.14)} \int (x^2+1)e^{-x} \, \mathrm{d}x; \qquad \text{(5.5.17)} \int \frac{y}{e^{2y}} \, \mathrm{d}y.$$

Excecise 3.7. 當積分的函數是 $f(x) \cdot g(x)$ 其中 $f(x)$ 是多項式（或有理根式），$g(x)$ 是對數有關的函數，則可令 $u = g(x)$ 然後用分部積分處理。求以下積分：

$$\text{(5.5.10)} \int p^5 \ln p \, \mathrm{d}p; \qquad \text{(5.5.15)} \int \frac{\ln x}{x^2} \, \mathrm{d}x; \qquad \text{(5.5.16)} \int \frac{\ln y}{\sqrt{y}} \, \mathrm{d}y.$$

Excecise 3.8. 積分的函數不是兩個相異函數相乘時，可令 $v = x$ 然後用分部積分處理。求以下積分：

$$\text{(5.5.9)} \int \ln \sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x; \qquad \text{(5.5.18)} \int \arctan \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x; \qquad \text{(5.5.19)} \int (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Excecise 3.9. 利用部分分式做以下積分：課本習題 5.5.3, 5.6.4, 5.6.5, 5.5.13, 5.5.20, 5.5.21.

Excecise 3.10. 做以下需要變換變數、分部積分以及部分分式的綜合問題。

（5.5.25） $\int x \ln(1+x) \, \mathrm{d}x$（先利用 $u = \ln(1+x)$ 做分部積分，再用部分分式）。

（5.6.16） $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x+3}+x}$（先利用 $u = \sqrt{x+3}$ 做變數變換，再用部分分式）。