最複雜情況為分母有虛根 $a+bi$ 且是 k 重根，即分母有因式 $((x-a)^2+b^2)^k$，則這部分的部分分式可寫成

$$\frac{c_1x+d_1}{(x-a)^2+b^2}+\frac{c_2x+d_2}{((x-a)^2+b^2)^2}+\cdots+\frac{c_kx+d_k}{((x-a)^2+b^2)^k}.$$

因為這情況複雜度較高，我們大致舉例說明如何處理。例如求 $\dfrac{3x^4+x^3+20x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+4)^2}$ 的反導函數，我們先寫成部分分式（注意 $\pm 2i$ 有二重根），即 $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{c_1x+d_1}{x^2+4}+\dfrac{c_2x+d_2}{(x^2+4)^2}$。通分後因為有 5 個未知數，我們可以代 5 個數解出 $a=2$, $c_1=1, d_1=0$ 以及 $c_2=0, d_2=-1$。因此

$$\int\frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x.$$

我們有 $\displaystyle\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\ln|x+1|$，並利用變換變數 $u=x^2+4$ 可得 $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)$。至於積分 $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$ 可利用所謂的三角變換處理。不過這裡我們不介紹此特殊技巧，取而代之，我們介紹使用積分表的方法。

積分表大部分都會分類，在比較詳細的積分表中可找到 x^2+a^2（或類似表法 u^2+c^2）這類，其中有一項可以幫助我們處理 $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$，即

$$\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}x\right).$$

所以我們代 $a=2$, $n=2$ 可得

$$\int\frac{1}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\left(\frac{x}{(x^2+4)}+\int\frac{1}{(x^2+4)}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{8}\frac{x}{(x^2+4)}+\frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2}.$$

其中 $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$ 可用變換變數 $x=2u$ 處理或直接利用表中 $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+a^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ 代 $a=2$。

積分表中有許多迭代公式可以運用。例如課本 Example 5.7.2 求 $\displaystyle\int x^3\sin x\,\mathrm{d}x$。我們可以在積分表的三角函數類中找到

$$\int u^n\sin u\,\mathrm{d}u=-u^n\cos u+n\int u^{n-1}\cos u\,\mathrm{d}u \tag{3.24}$$

利用 $u=x$ 以及 $n=3$ 可得 $\displaystyle\int x^3\sin x\,\mathrm{d}x=-x^3\cos x+3\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$。在三角函數類中也有

$$\int u^n\cos u\,\mathrm{d}u=u^n\sin u-n\int u^{n-1}\sin u\,\mathrm{d}u.$$

所以利用 $u=x$ 以及 $n=2$ 可得 $\displaystyle\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x=x^2\sin x-2\int x\sin x\,\mathrm{d}x$。再利用一次式子 (3.24) 在 $n=1$ 的情形得 $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\int\cos x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x$。結合這些結果得

$$\int x^3\sin x\,\mathrm{d}x=-x^3\cos x+3\left(x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x)\right)=-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x.$$

積分表中函數的變數經常用 u 來表示（而不是 x）主要就是告訴我們即使用查表法，經常需要用變換變數才能完成。我們看以下例子。

Example 3.2.11. 課本 Example 5.7.3 求 $\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x$。在積分表的分類中，我們僅看到 $\sqrt{u^2+a^2}$, $\sqrt{u^2-a^2}$ 以及 $\sqrt{a^2-u^2}$，並沒有看到如 $\sqrt{au^2+bu+c}$ 這樣的分類。這意味著我們必需利用配方法 $x^2+2x+4=(x+1)^2+3$，再利用變換變數 $u=x+1$ 將函數寫成符合積分表中的某類。此時由於 $x=u-1$ 以及 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，所以變換變數成

$$\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x=\int(u-1)\sqrt{u^2+3}\,\mathrm{d}u=\int u\sqrt{u^2+3}\,\mathrm{d}u-\int\sqrt{u^2+3}\,\mathrm{d}u.$$

其中 $\int u\sqrt{u^2+3}\,\mathrm{d}u$ 可用變換變數 $v=u^2+3$（或查表）得 $\int u\sqrt{u^2+3}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}(u^2+3)^{3/2}$，而 $\int\sqrt{u^2+3}\,\mathrm{d}u$ 也可用查表得積分為 $\frac{u}{2}\sqrt{u^2+3}+\frac{3}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+3}\right)$。故原積分等於

$$\frac{1}{3}(x^2+2x+4)^{3/2}-\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+4}+\frac{3}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right).$$

♯

要注意，並不是利用查表就可以幫我們處理所有函數的積分。事實上並不是所有可以用常見函數表示的函數它的反導函數也可用常見的函數來表示。例如

$$\int e^{x^2}\mathrm{d}x,\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x,\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

等，都被證實無法用常見的函數來表示。

3.3. 積分的應用

定積分的定義是由 Riemann sum 取極限而來，所以只要能用 Riemann sum 表示的求值問題都可以用定積分求得。例如前面提的面積，以致於之後會談論的體積，都是定積分應用的範圍。

3.3.1. 函數所圍的區域面積. 在定義定積分時，我們知道當函數 $f(x)$ 在 $a\le x\le b$ 取值皆大於等於 0 時，就可以用黎曼和取極限求得函數圖形 $y=f(x)$ 在 $a\le x\le b$ 這個區間與 x 軸之間所圍區域的面積。所以此時面積可以用定積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 求得。同理，當兩函數 $f(x),g(x)$ 在 $a\le x\le b$ 都滿足 $f(x)\ge g(x)$ 時，我們一樣可以用黎曼和的極限來求函數圖形 $y=f(x),y=g(x)$ 在此區間所圍出的面積。此時當我們將區間 $[a,b]$ 分割成 n 段，利用 n 個長方形面積和來逼近 $y=f(x),y=g(x)$ 所圍區域的面積。每個長方形的寬度為 $\triangle x_i$ 而高度為 $f(x_i^*)-g(x_i^*)$（注意 $f(x_i^*)\ge g(x_i^*)$，所以這確實為長度），故其面積為 $(f(x_i^*)-g(x_i^*))\triangle x_i$。因此黎曼和可寫成 $\sum_{i=1}^{n}(f(x_i^*)-g(x_i^*))\triangle x_i$ 取極限便得面積為 $\int_a^b(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$。

Example 3.3.1. 課本 Example 6.1.1 探討函數圖形 $y=e^x$ 與直線 $y=x$ 在 $0\le x\le 1$ 這個範圍所圍的面積。確認 e^x 在這範圍皆大於 x 後，我們便可將此區域面積用定積分

$\int_0^1 (e^x - x)\,\mathrm{d}x$ 表示，並得面積為

$$\int_0^1 (e^x - x)\,\mathrm{d}x = (e^x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 = (e - \frac{1}{2}) - (1 - 0) = e - \frac{3}{2}.$$

課本 Example 6.1.2 探討兩函數圖形 $y = x^2$ 與 $y = 2x - x^2$ 所圍的有界區域面積。這次沒有給 x 的範圍，所以我們必需先找到 x 的範圍。由於兩個函數圖形一個是凹向上、另一個是凹向下，所以它們相交處之間便會圍出一個有界區域。利用 $x^2 = 2x - x^2$ 求出它們交於 $x = 0$ 和 $x = 1$。接著我們必需確認 $y = x^2$ 與 $y = 2x - x^2$ 其中哪一個在此範圍 $0 \leq x \leq 1$ 是在上方。可由 $x^2 - (2x - x^2)$ 判斷或代 $x = \frac{1}{2}$，知在 $x \in [0, 1]$ 時 $y = 2x - x^2$ 在 $y = x^2$ 上方。故可將此區域面積用定積分 $\int_0^1 ((2x - x^2) - x^2)\,\mathrm{d}x$ 表示，並得面積為

$$\int_0^1 (2x - 2x^2)\,\mathrm{d}x = (x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

這裡補充一下，一般來說兩個函數 $f(x), g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 未必都滿足其中一個一直在另一個上方，而可能時而在上，時而在下。所以一般來說會以 $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$ 來表示並計算它們在這個區間所圍面積。計算時必須把哪一個在上哪一個在下變化的區間區隔出來再分別計算。例如 $y = x^3$ 與 x 軸在 $-1 \leq x \leq 1$ 之間所圍區域不是 $\int_{-1}^1 x^3\,\mathrm{d}x$，因為上下抵消，積分會得到 $\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^1 = 0$。其面積應是 $\int_{-1}^1 |x^3|\,\mathrm{d}x$，因為 $y = x^3$ 在 $x \in [-1, 0]$ 時在 x 軸下方，而 $x \in [0, 1]$ 時在 x 軸上方，所以面積為

$$\int_{-1}^1 |x^3|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 (0 - x^3)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^0 + \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

♯

有時我們需要計算函數圖形到無窮遠點所圍的區域面積。由於我們不可能真的計算到無窮遠，所以這時便需用到極限的概念。也就是說當 $f(x)$ 在 $x \geq a$ 時皆大於等於 0，我們要計算 $y = f(x)$ 在 $x \geq a$ 和 x 軸所圍面積，此時我們會用 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 來表示這個面積。這個積分一般不稱為定積分，而稱之為“瑕積分”(improper integral)。瑕積分的計算方式便是先考慮積有限的範圍，即考慮 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，然後再讓 b 趨近於無限大，求其極限。瑕積分不只幫我們求面積，也有其他應用，所以不需 $f(x) \geq 0$，在一般狀況定義瑕積分為

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.25}$$

注意這裡 a 是固定的數字，而 b 是任意選取的，所以對 b 取極限。當極限存在時稱此瑕積分收斂，並以收斂值為其積分值；而若極限不存在，便稱此瑕積分發散。

Example 3.3.2. 我們分別求瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 以及 $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (課本 Example 5.8.1)。依定義 (式子 (3.25))

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (-\frac{1}{b} + 1) = 1.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln b - 0 = \infty.$$

所以我們說瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收斂且其值為 1；而瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 發散。注意雖然 $y = \frac{1}{x^2}$ 和 x 軸所圍區域從 $x = 1$ 延伸到無窮遠面積一直增加，但不會增加到無限大，從前面計算知這面積會趨近於 1；但 $y = \frac{1}{x}$ 和 x 軸所圍面積就會趨近於無限大。 ♯

瑕積分的定義也可推廣到負無窮遠，當 b 為固定值，我們定義瑕積分 $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 為

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.26}$$

例如瑕積分 $\int_{-\infty}^0 e^x\,\mathrm{d}x$（課本 Example 5.8.3）依定義為收斂且其值為 1 因為

$$\int_{-\infty}^0 e^x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}(1 - e^a) = 1.$$

我們也可談兩端都趨近於無限大的瑕積分，其定義為選取一固定實數 c（通常選 0），然後分別計算上下界的瑕積分 $\int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x, \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 再加起來，亦即

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.27}$$

注意兩個瑕積分要分開算，再加起來，其中只要有一個瑕積分是發散，原瑕積分就發散。千萬不要用 $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 這樣的方式計算，會有正負抵消造成錯誤的情況發生。

Example 3.3.3. 考慮瑕積分 $\int_{-\infty}^\infty x\,\mathrm{d}x$，若用 $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a x\,\mathrm{d}x$，會得到

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}x^2\Big|_{-a}^a = \frac{1}{2}(a^2 - a^2) = 0,$$

這樣的錯誤發生。事實上，依定義應為

$$\int_{-\infty}^\infty x\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 x\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_0^b x\,\mathrm{d}x.$$

因為其中 $\lim_{b\to\infty}\int_0^b x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\infty}\frac{1}{2}b^2 = \infty$ 為發散（事實上 $\int_{-\infty}^0 x\,\mathrm{d}x$ 也發散）所以此瑕積分為發散。

課本 Example 5.8.4 考慮瑕積分 $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$。分開來計算，我們有

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}x\Big|_0^b == \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}b = \frac{\pi}{2}.$$

同理可得 $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} -\tan^{-1}a = \frac{\pi}{2}$。故 $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$。 ♯

前面談的瑕積分是在無限的區間積分，但在積分的範圍內函數都是有定義的。還有一種瑕積分是在有限區間積分，但函數在積分範圍某些點無定義（趨近於無限大）。例如

$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，由於 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $x=0$ 無定義，所以它們都是瑕積分。這種瑕積分和前面情況一樣的概念處理：先考慮不含無定義點的定積分，再慢慢逼近求極值。因此我們有瑕積分

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \ln x\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0^+}(\ln 1 - \ln a) = \infty$$

為發散；而

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0^+}(2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}) = 2$$

為收斂且其值為 2。

前面在探討 $\frac{1}{x}$ 的不定積分為 $\ln|x|$ 有提及 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 為瑕積分，就是因為 $\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 時無定義（不連續），無法套用微積分基本定理。事實上，如同前面的定義，此瑕積分應為 $\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$。由於已知 $\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 為發散，所以 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 也是發散。

3.3.2. 平均值. 當有有限個數字，其平均值就是將這些數字加起來，再除以這些數字的個數。當有無限多個數字，要求其平均，我們可以利用極限的概念，先算有限多個的平均值，再逐漸增加數量求其極限。利用這個概念，一個連續函數在一個區間的平均，便可以用黎曼和的極限表示成定積分的形式。

假設在時間為 t 時溫度為 $f(t)$，我們要如何算從時間 a 到 b 這段時間的平均溫度呢？我們可以將這段時間均分為 n 等分，亦即每一等分時間間距為 $\triangle t_i = \frac{b-a}{n}$。然後在每段時間中挑一個時間 t_i^* 測量得到溫度 $f(t_i^*)$。這 n 個溫度的平均值可寫成

$$\frac{1}{n}(f(t_1^*)+f(t_2^*)+\cdots+f(t_n^*)) = \frac{\triangle t_i}{b-a}(f(t_1^*)+f(t_2^*)+\cdots+f(t_n^*)) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^n f(t_i^*)\triangle t_i,$$

恰為黎曼和的形式。所以當分割的次數逐漸增加取極限可得這段時間的平均溫度為

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^n f(t_i^*)\triangle t_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

因此我們定義連續函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 的平均值為

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例如課本 Example 6.2.2 提及西元 1900 年全世界人口約為 1.43653×10^9。若從 1900 年開始（設 $t=0$），t 年後世界人口數依模型為 $P(t) = 1.43653\times 10^9\cdot(1.01395)^t$。則我們可以算出整個 20 世紀（即 $t=0$ 到 $t=100$）全世界人口的平均值約為

$$\frac{1}{100}\int_0^{100} 1.43653\times 10^9\cdot(1.01395)^t\,\mathrm{d}t = 1.43653\times 10^7\cdot\frac{(1.01395)^{100}-1}{\ln(1.01395)} \approx 3.1\times 10^9.$$

關於平均值有一個重要性質，稱為積分的均值定理。這個均值定理可以用（微分）均值定理處理。回顧當函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 為連續，且令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，則由第一型微積分基本定理知 $F'(x)=f(x)$，因此對任意 $c\in(a,b)$，皆有 $F'(c)=f(c)$。再由（第二型）微積

分基本定理（Theorem 3.1.2）知 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$。另一方面，均值定理（Theorem 2.3.1）告訴我們存在 $c \in (a, b)$ 滿足 $F'(c) = \frac{1}{b-a}(F(b) - F(a))$，因此得知 c 滿足

$$f(c) = F'(c) = \frac{1}{b-a}(F(b) - F(a)) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.28}$$

這個均值定理可以用剛才平均溫度的例子來理解，它告訴我們一天中會有一個特定時間的溫度和整天的平均溫度一樣。

Example 3.3.4. 課本 Example 6.2.3 考慮函數 $f(x) = x^2 + 1$ 在區間 $[-1, 2]$ 的情形。要求 $f(x)$ 在這之間的平均值，並找到 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c)$ 為此平均值，以驗證積分均值定理。依定義 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 的平均值為 $\frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}x^3 + x)\Big|_{-1}^{2} = 2$。我們必須找到 $c \in (-1, 2)$ 滿足 $f(c) = c^2 + 1 = 2$。解得 $c = \pm 1$ 確實其中一點 $1 \in (-1, 2)$。 ♯

3.3.3. 體積. 當一個物體的每一個切面面積可以用函數表示時，便可以用黎曼和表示此物體的體積。也因此在此情形，我們可以用定積分求此物體的體積。

我們可以把要算體積的物體放在空間坐標的 x 軸上，假設放在 $x = a$ 到 $x = b$ 之間。沿著與 x 軸垂直的方向將此物體細切成 n 片。每片依序算其體積，第 i 片的薄片厚度用 $\triangle x_i$ 表示且設其切面面積為 $A(x_i)$，當切得夠細時，此薄片面積會很接近 $A(x_i)\triangle x_i$。因此當越切越細時每片體積的加總 $\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\triangle x_i$ 會越來越接近其體積，因此此黎曼和取極限便可得此物體的體積為

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\triangle x_i = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.29}$$

這就是利用積分算體積的方式。

課本 Example 6.4.5 考慮的物體其底為半徑為 1 的圓，將粗體置於 xy 平面，且圓心在原點上。已知沿著與 x 軸垂直的方向且此物體，每個切面皆為正三角形。由於在 x 坐標為 x_i 的位置所切的切面其底為與圓心距離為 $|x_i|$ 的弦，故弦長為 $2\sqrt{1 - x_i^2}$。也因此知此切面為底為 $2\sqrt{1 - x_i^2}$ 的正三角形。由正三角形每個角為 $\frac{\pi}{3}$ 即三角形面積公式知此切面面積為 $\frac{1}{2}\left(2\sqrt{1 - x_i^2}\right)^2 \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}(1 - x_i^2)$。由於 x 的範圍為 $x = -1$ 到 $x = 1$，故得此物體體積為

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{3}(1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}(x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

一般的物體很多可用旋轉的概念形成。例如一個上半圓以底部直徑為軸旋轉一圈便可得到一個球、一個線段以通過端點的另一直線軸旋轉一圈便可得到一個圓錐，等。以這種方式形成的物體，稱為旋轉體。旋轉體的體積都能用積分的方式求其體積。假設我們要考慮的旋轉體是函數圖形 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 到 $x = b$ 這一段，以 x 軸為旋轉軸繞一圈所得。由於對此旋轉體在每個分割點 x_i 沿著與 x 軸垂直的方向所切的薄片切面是一個圓。這個圓的半徑就是 $|f(x_i)|$ 所以面積 $A(x_i)$ 為 $\pi(f(x_i))^2$。利用積分算體積的方式（式子 (3.29)），得

到此旋轉體的體積為

$$\pi\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.30}$$

Example 3.3.5. 課本 Example 6.4.2 探討半徑為 r 的球之體積。由於球可用半徑為 r 的上半圓旋轉而得，我們可將之視為是以函數 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 在 $x=-r$ 和 $x=r$ 之間以 x 軸為旋轉軸旋轉一圈的旋轉體。故依式子 (3.30) 知其體積為

$$\pi\int_{-r}^{r}(\sqrt{r^2-x^2})^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\pi(r^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-r}^{r}=2\pi(r^3-\frac{1}{3}r^3)=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

課本 Example 6.4.4 探討兩函數 $y=x$ 和 $y=x^2$ 所圍區域以 x 軸為旋轉軸旋轉一圈的旋轉體體積。首先先求兩圖形的交點發生於 $x=x^2$，即 $x=0,x=1$ 之處，所以我們只要考慮 $x=0$ 到 $x=1$ 這一部分。由於此部分 $y=x$ 都在 $y=x^2$ 的上方，所以這個旋轉體可視為 $y=x$ 所繞得較大的旋轉體（圓錐）挖掉 $y=x^2$ 所繞得較小的旋轉體而得。因此可得此旋轉體體積為

$$\pi\int_0^1(x)^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^1(x^2)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1(x^2-x^4)\,\mathrm{d}x=\pi(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5)\Big|_0^1=\frac{2}{15}\pi.$$

3.3.4. 生物學的應用. 最後藉由一些生物學上的應用，再次強調寫成黎曼和便能用定積分計算，這個重要的方法。

3.3.4.1. 心臟輸出率. 這裡指的是每單位時間心臟推入主動脈的血液量。一種測量心輸出量的方法（dye dilution method）是輸入固定劑量 A 的染劑。在確定染劑最後會被稀釋殆盡的時間 T 內將時間分割成 n 等分（故每段時間為 $\triangle t_i=\dfrac{T}{n}$），在每段時間開始 t_i，測量血液中染劑濃度 $c(t_i)$。若心臟輸出率為 F，且每段時間 $\triangle t_i$ 很短時，這段時間所得染劑的量應為血液量 $F\triangle t_i$ 乘上染劑濃度 $c(t_i)$。所以總染劑量 A 會很接近 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}c(t_i)F\triangle t_i$，且會因 n 越來越大越接近。這是一個黎曼和故取 $n\to\infty$ 得極限 $\displaystyle\int_0^T c(t)F\,\mathrm{d}t=A$。因此便可算得心臟輸出率為

$$F=\frac{A}{\int_0^T c(t)\,\mathrm{d}t}.$$

課本習題 6.3.11 所舉的例子是劑量 $A=6$、時程 $T=10$ 而測得染劑濃度符合函數 $c(t)=20te^{-0.6t}$。利用分部積分

$$\int te^{-0.6t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{0.6}te^{-0.6t}+\frac{1}{0.6}\int e^{-0.6t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{0.6}(te^{-0.6t}+\frac{1}{0.6}e^{-0.6t})$$

可得 $\displaystyle\int_0^{10}te^{-0.6t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{0.36}(-7e^{-6}+1)$ 因此在此情況 $F=\dfrac{6}{20}\times\dfrac{0.36}{-7e^{-6}+1}\approx 0.1099$。

3.3.4.2. 血流量. 這裡指的是每單位時間流出的血液量。由於血液在血管的流動速度會和其與血管中心軸的距離 r 有關，所以我們必需將血管半徑 R 分段來計算流量。假設依與中心軸距離由小而大依序為 $r_1,r_2,\dots,r_n$。這樣分割血管的剖面每一段都是環狀。當分割很細時，由於環的寬度 $\triangle r_i=r_i-r_{i-1}$ 很小，我們可以假設在這環內的血液流速都是 $v(r_i)$。因此我們只要知道這個環的面積，乘上流速 $v(r_i)$ 就可知道在單位時間從這個環流出的血液量。

由於第 i 短的環，是半徑為 r_i 的圓扣掉半徑為 r_{i-1} 的圓。因為想寫成黎曼和，我們將 r_{i-1} 寫成 $r_{i-1} = r_i - \triangle r_i$ 所以這個環的面積為

$$\pi r_i^2 - \pi r_{i-1}^2 = \pi(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) = \pi(2r_i - \triangle r_i)\triangle r_i = 2\pi r_i \triangle r_i - \pi(\triangle r_i)^2.$$

因為分割得很細 $(\triangle r_i)^2$ 比起 $\triangle r_i$ 小得很多，可以忽略不計，所以這個環狀區域的面積很接近 $2\pi r_i \triangle r_i$。也因此單位時間流出這個環的血液量為 $2\pi r_i \triangle r_i \cdot v(r_i)$。將這些環單位時間流出量加總 $\sum_{i=1}^{n} 2\pi v(r_i) r_i \triangle r_i$ 就會很接近單位時間的血流量 F，且會因 n 越來越大越接近。這是一個黎曼和故取 $n \to \infty$ 得極限 $\int_0^R 2\pi r v(r)\,\mathrm{d}r = F$。

事實上根據血液的層流定律（Law of Laminar Flow），當血管半徑為 R 長度為 ℓ，而壓力為 P 黏度為 η 時，距離血管中心軸為 r 的流速為 $v(r) = \dfrac{P}{4\eta\ell}(R^2 - r^2)$。所以我們可以得到血流量為

$$F = \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta\ell}(R^2 - r^2)\,\mathrm{d}r = \frac{\pi P}{2\eta\ell}\int_0^R (R^2 r - r^3)\,\mathrm{d}r = \frac{\pi P}{2\eta\ell}(R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4})\Big|_0^R = \frac{\pi P R^4}{8\eta\ell}.$$

這稱為 *Poiseuille's Law*。

3.3.4.3. 人口預估. 影響人口數量的有兩個函數。一個是所謂的新生函數（renewal function）$R(t)$，它表示從現在起 t 年後新生人口增加速度；另一個是所謂存活函數（survival function）$S(t)$，它指的是當時人口 t 年後仍存活的比率。

若現有人口為 P_0，要估計 T 年後的人口。首先注意依照存活函數定義，當前人口會有 $S(T)\cdot P_0$ 人在 T 年仍存活。不過之後出生的人口會因出生時間不同存活率不同，因此我們必需將時間 T 分割成 n 段，$t_1, t_2, \ldots, t_n$，依序計算這些段出生人口到時存活的人數。當分割很細時我們可假設在 t_{i-1} 到 t_i 這段新增人口速度都是 $R(t_i)$，所以這段時間新增人數為 $R(t_i)\cdot(t_i - t_{i-1}) = R(t_i)\cdot\triangle t_i$。而這些人到 T 年還有 $T - t_i$ 年，所以他們到 T 年時有 $S(T - t_i)\cdot R(t_i)\cdot\triangle t_i$ 人存活。將這些各段時間算出的存活人數加總得 $S(T)\cdot P_0 + \sum_{i=1}^{n} S(T - t_i)\cdot R(t_i)\cdot\triangle t_i$ 會很接近 T 年後之人口 $P(T)$，且會因 n 越來越大越接近。這是一個黎曼和故取 $n \to \infty$ 得極限 $S(T)\cdot P_0 + \int_0^T S(T - t)\cdot R(t)\,\mathrm{d}t = P(T)$。

課本 Example 6.3.1 討論有一池塘現有 5600 隻鱒魚，而這些鱒魚在第 t 的新生率（新生函數）為 $R(t) = 720e^{0.1t}$(fish/year)，而過 t 年的存活率（存活函數）為 $S(t) = e^{-0.2t}$。想預估 10 年後的鱒魚數量。依前面討論，我們有

$$P(10) = 5600e^{-2} + 720\int_0^{10} e^{-0.2(10-t)}e^{0.1t}\,\mathrm{d}t = 5600e^{-2} + 720e^{-2}\int_0^{10} e^{0.3t}\,\mathrm{d}t.$$

因為 $\int_0^{10} e^{0.3t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{0.3}e^{0.3t}\Big|_0^{10} = \dfrac{1}{0.3}(e^3 - 1)$，所以

$$P(10) = 5600e^{-2} + \frac{720}{0.3}e^{-2}(e^3 - 1) = 5600e^{-2} + 2400(e - e^{-2}) \approx 6956.95$$

Excecise 3.11. 利用積分表做課本習題：5.7 (3, 10, 15, 16)。

Excecise 3.12. 做有關瑕積分課本習題：5.8.3, 5.8.8, 5.8.18.

Excecise 3.13. 做有關面積課本習題：6.1.1, 6.1.10, 6.1.14.

Excecise 3.14. 做有關平均值課本習題：6.2.3, 6.2.13.

Excecise 3.15. 做有關體積課本習題：6.4.3, 6.4.5, 6.4.14.

——————— THE END 期末考加油 ———————