5.3.3. 求 $\left(\frac{q}{p}\right)$. 最後我們來探討 p,q 為相異奇質數的情形. 若給定了 p 和 q 我們當然就可以利用 Gauss's Lemma 求 $\left(\frac{q}{p}\right)$, 不過現在要討論的是一般的 p 和 q, 我們必須考慮別的方法.

在 Gauss's Lemma 中我們需要算出 $\{a,2a,\ldots,\frac{p-1}{2}a\}$ 中有多少元素其除以 p 的餘數大於 $(p-1)/2$. 若其個數為 n, 則 $\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^n$. 由於 $(-1)^n$ 的取值完全取決於 n 是奇數或偶數, 所以我們並不需精確地算出 n 為多少, 只需確認其為奇數或偶數即可. 以下我們將介紹一個判別 n 為奇或偶的方法, 不過由於我們要考慮的 $\left(\frac{q}{p}\right)$ 其中 q 為奇質數, 所以底下的方法中我們僅考慮 a 為奇數的情況.

為了方便我們先介紹一個符號. 給定一實數 r, 我們令 $\lfloor r\rfloor$ 表示小於或等於 r 的整數中最大的整數（可稱為：向下取整）. 例如若 π 表圓周率, 則 $\lfloor\pi\rfloor=3$. 又例如 $\lfloor -5.2\rfloor=-6$. 要注意當 m,n 是正整數時 $\lfloor m/n\rfloor$ 即為 m 除以 n 的商.

Lemma 5.3.4. 給定一奇質數 p 及一正奇數 a 滿足 $p\nmid a$. 若令 n 表示集合 $\{a,2a,\ldots,\frac{p-1}{2}a\}$ 中除以 p 餘數大於 $(p-1)/2$ 的元素個數, 則

$$n\equiv\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\lfloor ka/p\rfloor \pmod 2.$$

Proof. 假設 ka 除以 p 的餘數為 r, 則依定義我們有 $ka=p\lfloor ka/p\rfloor+r$. 故若依 Lemma 5.3.2 的證明我們將 $\{a,2a,\cdots,\frac{p-1}{2}a\}$ 中的元素除以 p 的餘數分成 $r_1,\ldots,r_n$ 及 $s_1,\ldots,s_m$ 兩部份, 其中 r_i 是大於 $(p-1)/2$ 的部份, 而 s_j 表小於等於 $(p-1)/2$ 的部份, 則

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}ka=\sum_{k=1}^{(p-1)/2}p\lfloor ka/p\rfloor+\sum_{i=1}^{n}r_i+\sum_{j=1}^{m}s_j.$$

由於我們僅在乎奇或偶, 所以可考慮上式在 modulo 2 的情況, 故利用 a 和 p 皆為奇數 (即 $a\equiv p\equiv 1 \pmod 2$) 我們得

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}k\equiv\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\lfloor ka/p\rfloor+\sum_{i=1}^{n}r_i+\sum_{j=1}^{m}s_j \pmod 2. \tag{5.3}$$

另一方面在 Lemma 5.3.2 的證明中我們證得

$$\{p-r_1,\ldots,p-r_n,s_1,\ldots,s_m\}=\{1,2,\ldots,(p-1)/2\}.$$

故得

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}k=\sum_{i=1}^{n}(p-r_i)+\sum_{j=1}^{m}s_j=np-\sum_{i=1}^{n}r_i+\sum_{j=1}^{m}s_j.$$

再利用 $p\equiv 1 \pmod 2$ 得

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2}k\equiv n-\sum_{i=1}^{n}r_i+\sum_{j=1}^{m}s_j \pmod 2. \tag{5.4}$$

合併式子 (5.3) 和 (5.4) 得證

$$n \equiv \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \lfloor ka/p \rfloor + 2\sum_{i=1}^{n} r_i \equiv \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \lfloor ka/p \rfloor \pmod 2.$$

□

再次強調在 Lemma 5.3.4 的證明中我們用到 a 是奇數 (即 $a \equiv 1 \pmod 2$) 的假設, 所以此結果僅適用於 a 為奇數的情況, 千萬別用此法來算 $\left(\frac{2}{p}\right)$.

利用 Corollary 5.2.4 以及 Lemma 5.3.2, Lemma 5.3.4, 我們知給定一奇質數 p, 要計算一個正奇數 a 其 $\left(\frac{a}{p}\right)$ 之值, 我們只要計算 $\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \lfloor ka/p \rfloor$ 之值即可. 若其值為 N, 則得 $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^N$. 例如要求 $\left(\frac{5}{11}\right)$, 我們只要計算

$$\lfloor 5/11 \rfloor + \lfloor 10/11 \rfloor + \lfloor 15/11 \rfloor + \lfloor 20/11 \rfloor + \lfloor 25/11 \rfloor = 4,$$

故知 $\left(\frac{5}{11}\right) = (-1)^4 = 1$.

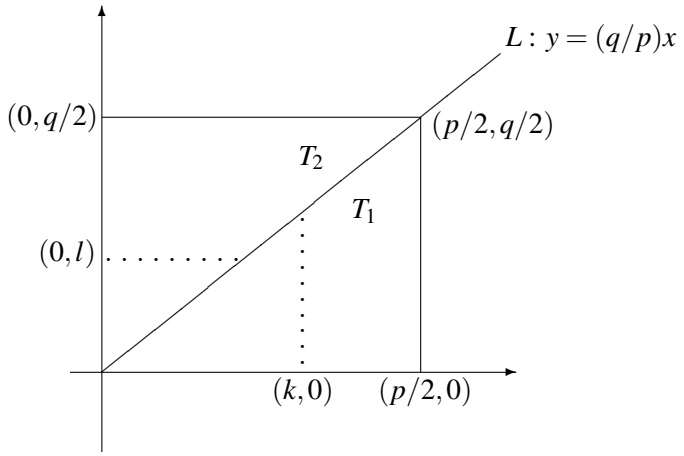
接著我們要利用 Lemma 5.3.4 來計算 $\left(\frac{q}{p}\right)$. 很容易理解算 $\left(\frac{q}{p}\right)$ 不止和 p 有關也和 q 有關, 所以我們要探討 $\left(\frac{q}{p}\right)$ 和 $\left(\frac{p}{q}\right)$ 的關係. 由於 p,q 皆為奇質數, 我們都可以利用 Lemma 5.3.4 來計算 $\left(\frac{q}{p}\right)$ 和 $\left(\frac{p}{q}\right)$. 因此我們要探討 $\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \lfloor kq/p \rfloor$ 和 $\sum_{l=1}^{(q-1)/2} \lfloor lp/q \rfloor$ 之間的關係.

在探討此問題前, 我們再從另一個角度來看 $\lfloor r \rfloor$ 這個整數. 當 r 是正的實數時, $\lfloor r \rfloor$ 之值就是所有滿足 $0 \le n \le r$ 的正整數 n 的個數. 在坐標 xy-平面上, 我們稱 x-軸及 y-軸坐標皆為正整數的點為 "正格子點". 依此看法, 當 k 是正整數時, $\lfloor kq/p \rfloor$ 之值就是直線 $x = k$ 在 $0 \le y \le kq/p$ 之間的正格子點個數. 而當 l 是正整數時, $\lfloor lp/q \rfloor$ 之值就是直線 $y = l$ 在 $0 \le x \le lp/q$ 之間的正格子點個數. 利用這種觀點, 我們有以下之結果.

Lemma 5.3.5. 假設 p 和 q 為相異奇質數. 則

$$\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{kq}{p} \right\rfloor + \sum_{l=1}^{(q-1)/2} \left\lfloor \frac{lp}{q} \right\rfloor = \frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}.$$

Proof. 在 xy-平面上, 考慮以 $(0,0)$, $(p/2,0)$, $(p/2,q/2)$ 以及 $(0,q/2)$ 四點為頂點的長方形區域 T, 並以直線 $L : y = (q/p)x$ 將此區域分成 T_1 和 T_2 兩部份. 其中 T_1 表直線 L 下方的部份, 而 T_2 表直線 L 上方的部份, 如下圖.



在 T 中的任意正格子點 (m,n), 依定義需滿足 $m,n \in \mathbb{N}$ 且 $0 \le m \le p/2$ 及 $0 \le n \le q/2$. 因此由 p,q 為奇數知在 T 中的正格子點個數為 $\dfrac{p-1}{2}\dfrac{q-1}{2}$.

另一方面在 T_1 中的正格子點 (k,s), 依定義需滿足 $k,s \in \mathbb{N}$ 且 $0 \le k \le p/2$ 及 $0 \le s \le kq/p$. 也就是說 $k \in \mathbb{N}$ 需滿足 $1 \le k \le (p-1)/2$, 且給定 k, 則 $0 \le s \le kq/p$. 換句話說要計算在 T_1 中的格子點, 等於在計算給定 $k \in \mathbb{N}$ 且 $1 \le k \le (p-1)/2$ 時會有多少 $s \in \mathbb{N}$ 滿足 $0 \le s \le kq/p$, 再將所有 k 所算得之結果加起來. 然而對任意的正整數 k 符合 $0 \le s \le kq/p$ 的正整數 s 的個數為 $\lfloor kq/p \rfloor$. 所以在 T_1 中的正格子點數為 $\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \lfloor kq/p \rfloor$. 同理在 T_2 中的正格子點數為 $\sum_{l=1}^{(q-1)/2} \lfloor lp/q \rfloor$.

在 T_1 和 T_2 的交界, 即滿足 $y = (q/p)x$ 且 $0 \le x \le p/2$ 的線段上會不會有正格子點呢? 若 (m,n) 為其上之一正格子點, 則我們有 $pn = qm$ 且 $1 \le m \le (p-1)/2$. 然而由 $pn = qm$ 可得 $p \mid qm$, 再因 p,q 為相異質數故由 Proposition 1.2.6(1) 知 $p \mid m$, 此和 $1 \le m \le (p-1)/2$ 相矛盾. 故知在 T_1 和 T_2 交界的線段上無正格子點. 因此在 T_1 和 T_2 上的正格子點數之和恰為在 T 上的正格子點數, 故得證 $\displaystyle\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{kq}{p} \right\rfloor + \sum_{l=1}^{(q-1)/2} \left\lfloor \frac{lp}{q} \right\rfloor = \frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}$. □

當 p,q 為相異奇質數, 若 $M = \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \lfloor kq/p \rfloor$ 且 $N = \sum_{l=1}^{(q-1)/2} \lfloor lp/q \rfloor$ 由 Lemma 5.3.4 知 $\left(\dfrac{q}{p}\right) = (-1)^M$ 且 $\left(\dfrac{p}{q}\right) = (-1)^N$. 而 Lemma 5.3.5 告訴我們 $M+N = (p-1)(q-1)/4$, 故得

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{M+N} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

因此我們有以下之結果.

Theorem 5.3.6 (Quadratic Reciprocity Law)**.** 假設 p 和 q 為相異奇質數. 則

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \begin{cases} -\left(\dfrac{p}{q}\right), & \text{若 } p \equiv q \equiv -1 \pmod 4; \\ \left(\dfrac{p}{q}\right), & \text{其他情形.} \end{cases}$$

Proof. 由於 p,q 皆為奇數, 我們依 $p\equiv\pm1 \pmod 4$ 以及 $q\equiv\pm1 \pmod 4$ 四種情形來討論.

假設 $p=4k-1$ 且 $q=4k'-1$ 其中 $k,k'\in\mathbb{N}$ (即 $p\equiv q\equiv -1 \pmod 4$). 則 $(p-1)/2=2k-1$ 且 $(q-1)/2=2k'-1$, 故得

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{(2k-1)(2k'-1)}=-1.$$

也就是說 $\left(\frac{q}{p}\right)=-\left(\frac{p}{q}\right)$.

剩下的情況為 p 和 q 中至少有一個在 modulo 4 之後餘 1. 不失一般性就假設 $p\equiv 1 \pmod 4$. 此時 $p=4k+1$, 其中 $k\in\mathbb{N}$, 故得 $(p-1)/2=2k$. 而 $(q-1)/2$ 必為整數故知

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{(2k)\frac{q-1}{2}}=1^{\frac{q-1}{2}}=1.$$

也就是說 $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)$. □

要注意 Theorem 5.3.6 要在 p,q 為相異奇質數時才適用, 否則若 q 不是奇質數, $\left(\frac{p}{q}\right)$ 這個符號是沒有定義的. 雖然 Theorem 5.3.6 並沒有明確告訴我們 $\left(\frac{q}{p}\right)$ 之值為何, 但是可利用 $\left(\frac{p}{q}\right)$ 之值來求得 $\left(\frac{q}{p}\right)$. 一般來說將 $\left(\frac{q}{p}\right)$ 的問題反轉成 $\left(\frac{p}{q}\right)$ 的問題就像輾轉相除法一樣, 可以快速的將問題簡化. 這是因為一般來說利用 Lemma 5.2.2(2), 要求 $\left(\frac{q}{p}\right)$ 時, 可假設 $q<p$, 所以一反轉成 $\left(\frac{p}{q}\right)$ 時我們已將一個 modulo 比較大的 p 的問題簡化成一個 modulo 比較小的 q 的問題. 例如求 $\left(\frac{7}{101}\right)$, 由於 $101\equiv 1 \pmod 4$, 故得 $\left(\frac{7}{101}\right)=\left(\frac{101}{7}\right)$. 所以馬上將 modulo 101 的問題轉成 modulo 7 的問題, 自然變得簡單. 事實上 $\left(\frac{101}{7}\right)=\left(\frac{3}{7}\right)$, 可馬上驗證知 $\left(\frac{3}{7}\right)=-1$ (或再用一次 Theorem 5.3.6 得 $\left(\frac{3}{7}\right)=-\left(\frac{7}{3}\right)=-\left(\frac{1}{3}\right)=-1$). 所以得知 $\left(\frac{7}{101}\right)=-1$. 總而言之, 對於一般的相異奇質數 p,q, 我們沒有辦法由 p 和 q 馬上得知 $\left(\frac{q}{p}\right)$ 之值. 但是利用 Theorem 5.3.6, 我們可以很快速的將問題化簡而求出其值. 最後我們來看一個例子整合這一節中學到的方法.

Example 5.3.7. 考慮二次 congruence equation $x^2\equiv 539 \pmod{631}$ 是否有解. 要注意若要用 Legendre symbol 處理, 首先要檢查 631 是否為質數. 我們可以利用篩法 (Proposition 1.5.8) 檢查小於 $\sqrt{631}$ 的質數是否可整除 631. 由於小餘 25 的質數皆不能整除 631, 所以 Proposition 1.5.8 告訴我們 631 是質數. 因此我們就是要計算 $\left(\frac{539}{631}\right)$ 之值. 由於 539 和 631 頗近, 我們利用 $539\equiv -92 \pmod{631}$ 以及 Lemma 5.2.2(2) 知 $\left(\frac{539}{631}\right)=\left(\frac{-92}{631}\right)$ 接著將 92 作質因數分解得 $92=2^2\times 23$. 故利用 Proposition 5.2.5 知

$$\left(\frac{539}{631}\right)=\left(\frac{-92}{631}\right)=\left(\frac{-1}{631}\right)\left(\frac{4}{631}\right)\left(\frac{23}{631}\right).$$

由於 $631 \equiv 3 \equiv -1 \pmod 4$, 故由 Theorem 5.3.1 知 $\left(\frac{-1}{631}\right) = -1$. 而 $4 = 2^2$, 故由 Lemma 5.2.2(1) 知 $\left(\frac{4}{631}\right) = 1$, 因此得 $\left(\frac{539}{631}\right) = -\left(\frac{23}{631}\right)$. 由於 $631 \equiv 23 \equiv 3 \pmod 4$, 故由 Theorem 5.3.6 知 $\left(\frac{23}{631}\right) = -\left(\frac{631}{23}\right)$. 又由 $631 \equiv 10 \pmod{23}$ 因此知

$$\left(\frac{539}{631}\right) = -\left(\frac{23}{631}\right) = \left(\frac{631}{23}\right) = \left(\frac{10}{23}\right) = \left(\frac{2}{23}\right)\left(\frac{5}{23}\right).$$

因為 $23 \equiv 7 \equiv -1 \pmod 8$, 故由 Theorem 5.3.3 知 $\left(\frac{2}{23}\right) = 1$. 又因 $5 \equiv 1 \pmod 4$, 故由 Theorem 5.3.6 知 $\left(\frac{5}{23}\right) = \left(\frac{23}{5}\right)$. 因此得 $\left(\frac{539}{631}\right) = \left(\frac{2}{23}\right)\left(\frac{5}{23}\right) = \left(\frac{23}{5}\right)$. 再由 $23 \equiv 3 \pmod 5$ 以及 $5 \equiv 1 \pmod 4$ 知 $\left(\frac{23}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)$. 所以知 $\left(\frac{539}{631}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$. 也就是說 $x^2 \equiv 539 \pmod{631}$ 無解.

當然了當初若看出 $539 = 7^2 \times 11$, 則馬上得 $\left(\frac{539}{631}\right) = \left(\frac{7^2}{631}\right)\left(\frac{11}{631}\right) = \left(\frac{11}{631}\right)$. 再因 $631 \equiv 11 \equiv 3 \pmod 4$ 以及 $631 \equiv 4 \pmod{11}$ 知

$$\left(\frac{539}{631}\right) = \left(\frac{11}{631}\right) = -\left(\frac{631}{11}\right) = -\left(\frac{4}{11}\right) = -1.$$

所以不管用哪種看法只要善用 Legendre symbol 且正確地使用 quadratic reciprocity law (記得只有奇質數才能置於 Legendre symbol 的下方), 便能快速且正確的求出 Legendre symbol 之值.

Exercise 5.9. 試計算以下的 Legendre symbols.

$$\text{(a)}\ \left(\frac{-79}{101}\right) \qquad \text{(b)}\ \left(\frac{91}{127}\right) \qquad \text{(c)}\ \left(\frac{2817}{4177}\right).$$

Exercise 5.10. 令 p 大於 3 的質數。

(1) 依 p modulo 4 分類說明 $\left(\frac{3}{p}\right)$ 與 $\left(\frac{p}{3}\right)$ 的關係，並求何時 $x^2 \equiv 3 \pmod p$ 有解。

(2) 依 p modulo 4 分類說明 $\left(\frac{-3}{p}\right)$ 與 $\left(\frac{p}{3}\right)$ 的關係，並求何時 $x^2 \equiv -3 \pmod p$ 有解。

(3) 依 p modulo 8 分類說明 $\left(\frac{6}{p}\right)$ 與 $\left(\frac{p}{3}\right)$ 的關係，並求何時 $x^2 \equiv 6 \pmod p$ 有解。

Exercise 5.11. 假設 p, q 皆為奇質數.

(1) 設 $p = 4q+1$, 求 $\left(\frac{q}{p}\right)$.

(2) 設 $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$. 求 $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{-q}{p}\right)$.