

Basic Logic

其實學習數學就像學習新的語言。一些名詞的定義就像“單字”一樣，而邏輯 *logic* 就好比是將這些單字組合成一個句子所需的“文法”。一般同學在學習邏輯時，會不自覺地將一些邏輯規則以背誦的方式記憶，這會造成以後學習上許多的障礙。其實這些規則應該是潛意識內的直覺，這樣學習數學才能通行無阻。

邏輯學可以是非常抽象的，不只與數學關係密切，也與資訊科學以及哲學發展有著密切的關係。不過這裡，我們僅介紹很基本的與數學論證相關的邏輯。

1.1. Connectives

在數學中能明確知道對或錯的論述我們稱之為 *statement*。例如 $2 > 0$ 是一個 *statement*， $3 < 2$ 也是一個 *statement* 但 $x > 0$ 就不是一個 *statement* (除非我們知道 x 是什麼)。注意一個 *statement* 只能是對或錯其中之一，不能是半對半錯或是有時候對有時候錯。所以我們稱一個 *statement* 的 *truth value* 為 T 當這個 *statement* 為對的 (即 true)；反之則以 F 表示，即此 *statement* 為錯的 (false)。

舉例來說“今天天氣很熱”不是一個 *statement*。為什麼呢？因為大家對熱的標準不一，除非我們明確定義“很熱”的標準（例如超過幾度）。再例如“天空打雷會下雨”這個論述我們覺得半對半錯，有時候會下有時候不會下，所以它也不是一個 *statement*。但如果改為“天空打雷一定會下雨”，那它便是一個 *truth value* 為 F 的 *statement*。這裡要注意，在數學上的敘述，我們往往會省略“一定”這個字眼，所以數學上當一個論述有時候對有時候錯，我們會認定它是錯的。例如“由 $x^2 > 4$ ，可得 $x > 2$ ”雖沒有加上“一定”的字眼，但我們認定它是 *truth value* 為 F 的 *statement*。

數個 *statements* 可以組合成一個 *statement*，連接這些 *statements* 的就是所謂 *connectives*。我們要探討經由 *connectives* 連結成的 *statement* 其對或錯的情形。

1.1.1. And. 首先介紹的便是“and”這一個 *connective*。這一個 *connective* 應該是大家最容易理解的一個。若 P 和 Q 皆為 *statement*，我們用 $P \wedge Q$ 表示「 P and Q 」這一個 *statement*

(邏輯上稱為 the “conjunction” of P, Q). $P \wedge Q$ 什麼時候是對的什麼時候是錯的呢？按照字面的意義 “and” 就是 “且” 的意思，就如同習慣用語當 P 而且 Q 都是對時我們才能說 $P \wedge Q$ 是對的，而只要 P 和 Q 其中有一個是錯的，我們便會說 $P \wedge Q$ 是錯的。例如「 $2 > 0$ and $2 < 7$ 」是對的，而「 $2 > 0$ 且 $2 > 7$ 」便是錯的。

我們可利用所謂的真值表 *truth table* 來表示用 connectives 連結兩個 statements 後其對錯的情況。前面提過，我們用 T 表示對 (true), F 表示錯 (false)。所以我們有以下的 truth table.

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

基本上 Truth table 就是將 P, Q 每個可能對錯的情況列出，然後由 P, Q 所對應的情況，寫下它們連接後的對錯情況。例如上表第三橫排為 P 為 T, Q 為 F 故寫下 $P \wedge Q$ 為 F。

很容易發現不管 P, Q 的對錯情況如何 $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 的對錯情形皆相同。也就是說 $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 在邏輯上是相等的。我們稱它們為 *logically equivalent*。

對於 logically equivalent, 我們需再釐清一下說法。當 P, Q 是確定的 statements 時, $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 也會是確定的 statements (也就是說它們對錯的情況已經固定), 所以此時說 $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 是 logically equivalent 並不是很恰當。事實上我們是將 P, Q 看成變數一樣, 它們可以用任意的 statement 取代, 所以此時 $P \wedge Q$ 的對錯會因為 P, Q 的不同而有所不同, 故此時說 $P \wedge Q$ 是 statement 也不恰當。在本講義, 當 P, Q 是可變動的情況之下, 我們便稱它們利用 connectives 連結起來的結果為 “statement form”。兩個 statement forms 在所有情況之下其 truth tables 皆相同, 我們便稱它們為 logical equivalent。所以我們應該說成 $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 這兩個 statement forms 為 logically equivalent。不過為了方便起見我們常常會省略 statement form 且用 “ $\sim$ ” 來表示兩個 statement forms 為 logically equivalent, 例如我們有 $(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P)$ 。

Truth table 可以幫助我們判斷許多 statements 用 connectives 連接起來後其對錯的情況, 例如 $(P \wedge Q) \wedge R$ 的 truth table 為

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F
T	T	F	T	F
T	F	F	F	F
F	T	F	F	F
F	F	F	F	F

Question 1.1. 你會列出 $P \wedge (Q \wedge R)$ 的 truth table 嗎？

注意 $(P \wedge Q) \wedge R$ 和 $P \wedge (Q \wedge R)$ 在定義上是不一樣的. $(P \wedge Q) \wedge R$ 是先探討 $P \wedge Q$ 的對錯再和 R 連結; 而 $P \wedge (Q \wedge R)$ 是先探討 $Q \wedge R$ 的對錯再和 P 連結. 不過從它們的 truth table 我們知道 $((P \wedge Q) \wedge R) \sim (P \wedge (Q \wedge R))$. 既然 $(P \wedge Q) \wedge R$ 和 $(P \wedge (Q \wedge R))$ 在邏輯上意義相同, 以後我們就可以不必括弧直接用 $P \wedge Q \wedge R$ 表示。

1.1.2. Or. 當 P 和 Q 皆為 statement, 我們用 $P \vee Q$ 表示「 P or Q 」這一個 statement (邏輯上稱為 the “disjunction” of P, Q). 按照字面的意義 “or” 就是 “或” 的意思. 不過在我們日常用語中 “或” 有兩種用法: 例如在速食店點套餐, 飲料可以選擇「可樂或果汁」. 這裡的 “或” 表示二者擇一, 你不可以兩個都選 (這種 “or” 稱為 *exclusive or*); 而遊樂園購票時規定「六歲以下或身高 105 公分以下」才可購買兒童票. 這裡的 “或” 表示六歲以下和身高 105 公分以下二者有一個成立就可以, 並不排除六歲以下且身高 105 公分以下同時成立的情況 (這種 “or” 稱為 *inclusive or*). 在數學邏輯上, “or” 指的是後面那種 inclusive or 的說法, 也就是說當 P 和 Q 其中有一個是對的 $P \vee Q$ 便是對的 (並不排除 P 和 Q 皆為對的情況). 換言之, 只有當 P 和 Q 都是錯的, $P \vee Q$ 才是錯的.

例如, 「 $4 < 5$ or $4 < 3$ 」這個 statement 是對的, 因為 $4 < 5$ 是對的. 而「 $4 > 5$ or $4 > 6$ 」這個 statement 便是錯的, 因為二者皆不成立. 要注意「 $4 < 5$ or $4 > 3$ 」這個 statement 依然是對的, 雖然你會認為用 and 比較好, 不過在邏輯上它依然是對的, 千萬別搞錯.

我們有以下關於 $P \vee Q$ 的 truth table.

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Question 1.2. $P \vee Q$ 和 $Q \vee P$ 是否為 *logically equivalent statement forms*? $(P \vee Q) \vee R$ 和 $P \vee (Q \vee R)$ 是否為 *logically equivalent statement forms*? $P \vee Q \vee R$ 有意義嗎?

既然 and, or 皆為 connectives, 我們可以將其混合使用. 例如當 P, Q, R 為 statements 我們可以考慮如 $(P \wedge Q) \vee R$, $(P \vee Q) \wedge R$, ... 等形式的 statements. 如何判定它們的對錯呢? 例如 $(P \wedge Q) \vee R$ 是對的就必須 $(P \wedge Q)$ 或 R 其中一個是對的. 所以只要是 R 是對的, $(P \wedge Q) \vee R$ 就一定對, 而若 R 是錯的那就必須 P, Q 皆對, $(P \wedge Q) \vee R$ 才會是對的. 注意, 千萬不要誤以為 $(P \wedge Q) \vee R$ 和 $P \wedge (Q \vee R)$ 這兩個 statement forms 是 logically equivalent. 很顯然的 $P \wedge (Q \vee R)$ 是對的就必須 P 和 $Q \vee R$ 皆為對的. 例如當 R 是對的時, 不管 Q 為對或錯 $Q \vee R$ 皆為對, 但還必須 P 為對才可得到 $P \wedge (Q \vee R)$ 是對的. 這和只要是 R 是對的, $(P \wedge Q) \vee R$ 就一定對不同, 所以 $(P \wedge Q) \vee R$ 和 $P \wedge (Q \vee R)$ 不是 logically equivalent statement forms. 當然我們也可利用以下的 truth table 判定它們不是 logically equivalent.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	T	F	F	T	T	F
T	T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	T	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

另一方面, 考慮 $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ 的 truth table,

P	Q	R	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F

不難發現

$$((P \wedge Q) \vee R) \sim ((P \vee R) \wedge (Q \vee R)).$$

同樣的我們可利用 truth table 檢查 $(P \vee Q) \wedge R$ 和 $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ 亦為 logically equivalent statement forms.

我們可以利用 truth table 檢驗一些 statement forms 是否為 logically equivalent. 在一些有關 logic 的書也會有一些 logical equivalences 的列表讓大家檢驗. 不過這些都是為了讓大家熟悉這些 connectives 以及 truth table 的運用. 除了以後和論證有關的 logical equivalences 我們需要注意且會特別提醒大家要熟悉, 一般來說大家不必花時間於記憶這些 logical equivalences.

最後提醒一下和 “or” 有關的數學符號 $\geq$ 和 $\leq$. 在數學上 $x \geq y$ 表示 $x > y$ or $x = y$, 所以 $4 \geq 3$ 這一個 statement 按照 or 的邏輯規則是對的. 同理 $4 \leq 5$ 是對的. 當然了 $4 \leq 4$ 也是對的。