1.1.3. If - Then. 這是一個數學定理裡常見的 connective 但又是許多同學不甚了解而經常誤解的 connective, 請務必弄清楚. 當 P 和 Q 皆為 statement, 我們用 $P \Rightarrow Q$ 表示「if P then Q」這一個 statement, 即「若 P 則 Q」的意思 (邏輯上稱為 the "conditional" of P, Q). 要注意 $P \Rightarrow Q$ 在數學上的意涵與純粹邏輯上有所不同. 主要的區別是, 數學上 $P \Rightarrow Q$ 較常表達的是 P,Q 之間的因果關係 (也就是說 P,Q 通常是相關的). 這裡 P,Q 通常不是 statement, 而是如「x 為實數」這樣的 "性質". 而邏輯上將 $\Rightarrow$ 看成是一個 connective 可以連結任意的 P,Q (即使它們毫無關係). 例如數學上我們有 "if $x > 3$ then $x^2 > 9$" 這樣的 statement (注意 $x > 3$ 和 $x^2 > 9$ 皆不是 statement, 但用 if-then 連結後, 它是一個 statement). $x > 3$ 和 $x^2 > 9$ 是有關係的. 而在邏輯上在我們有 "if $3 > 2$ then 2 is even" 這樣的 statement (即使 $3 > 2$ 和 2 為偶數是沒有關係的). 在探討 $P \Rightarrow Q$ 在邏輯上對錯的情況之前, 我們先強調它在數學理論以及推理與論證上的意涵.

在數學上, 當我們說「if P then Q」意即 "當 P 成立時, Q 一定成立". (注意: 為了區別性質與 statement, 我們說一個性質成不成立, 而不用對錯這樣的說法.) 這裡要強調的是, 當我們說 if P then Q 表示我們僅知道如果 P 成立, 則可確定 Q 一定成立. 如果 P 不成立, 是無法知道 Q 是否成立. 所以在數學上要論述「if P then Q」我們只關心當 P 成立時, Q 是否也成立這樣的 "因果關係", 不必在意 P 不成立的情況. 這一點和邏輯上的「if P then Q」看成 P,Q 這兩個 statements 的 connective 相當的不同, 因為既然要讓「if P then Q」成為一個 statement, 就必須明定 P,Q 在任何的對錯情況時 $P \Rightarrow Q$ 的對錯情況. 另外我們也要強調 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 在數學上是完全不一樣的. 有許多同學會誤以為可由 $P \Rightarrow Q$ 是對的，推得 $Q \Rightarrow P$ 是對的。這個是不正確的, 事實上 $P \Rightarrow Q$ 僅表示由 P 成立可推得 Q 成立, 但不表示當 P 不成立時不會使得 Q 成立. 例如我們知道 if $x > 3$ then $x^2 \geq 9$, 但這並不表示當 $x \leq 3$ 時不會使得 $x^2 \geq 9$. 也就是說我們無法由 Q 成立得到 P 成立. 總而言之, $P \Rightarrow Q$ 是對的，並不能確保 $Q \Rightarrow P$ 是對的. 等一下我們定義「if P then Q」在邏輯上的對錯情況時, 我們也會發現 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 在邏輯上也不是 equivalent statement forms.

Question 1.3. *如果我們知道 P 成立則 Q 成立. 那麼當我們發現 Q 不成立時, 是否可以斷言 P 也不成立?*

現在我們來看在邏輯上如何定義 $P \Rightarrow Q$ 的對錯情況. 從前面數學上的意義來看, 當 P,Q 為 statements 時, 如果 P 是對的且 Q 是對的, 那麼並未違背 $P \Rightarrow Q$ 的說法, 所以在這種情況我們定 $P \Rightarrow Q$ 為對. 但若 P 是對的而 Q 是錯的, 那麼就違背 $P \Rightarrow Q$ 的說法, 所以在這種情況我們定 $P \Rightarrow Q$ 為錯. 但是若 P 是錯的, 如何定 $P \Rightarrow Q$ 的對錯呢? 由於 $P \Rightarrow Q$ 並未論及當 P 是錯時, Q 會如何, 所以當 P 是錯時, 不管 Q 的對錯都未違背前述 $P \Rightarrow Q$ 的說法, 所以此時我們都定義 $P \Rightarrow Q$ 為對. 例如 $2 > 3$ 是錯的且 $2^2 > 9$ 是錯的, 但這並不違背前面所提 if $x > 3$ then $x^2 > 9$ 這一個對的 statement. 另一方面, $-4 > 3$ 是錯的, 但 $(-4)^2 > 9$ 是對的, 也不違背前述 if $x > 3$ then $x^2 > 9$ 這一個對的 statement. 簡單來說, 在數學上 $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$ 這個對的敘述, 由邏輯上 $P \Rightarrow Q$ 的定義便可以解釋成將 x 代入任何的實數, $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$ 都是對的. 總而言之, 關於 $P \Rightarrow Q$ 我們有以下的 truth table.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Question 1.4. 試利用 *truth table* 判斷 $Q \Rightarrow P$ 和 $P \Rightarrow Q$ 是否為 *logically equivalent statement forms?* $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ 是否和 $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ 為 *logically equivalent statement forms?* $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ 是否有意義?

或許有些同學對 $P \Rightarrow Q$ 的對錯情況為何這麼定義仍有疑慮, 在我們介紹 "if and only if" 這個 connective 時會再進一步說明.

最後我們補充 $P \Rightarrow Q$ 在英文上的幾種說法. 除了「if P then Q」外, 還有

- 「Q if P」
- 「P implies Q」
- 「P is sufficient for Q」(意即 P 成立足以使得 Q 成立)
- 「Q is necessary for P」(意即需要 Q 成立才有可能使得 P 成立)
- 「P only if Q」(意即只有當 Q 成立時 P 才可能成立)
- 「Q whenever P」(意即每當 P 成立時 Q 都會成立)

1.1.4. If and Only If. 當我們將 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 用 and 連接時, 即 $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$, 我們稱之為 "$P$ if and only if Q", 用 $P \Leftrightarrow Q$ 來表示 (邏輯上稱為 the "biconditional" of P, Q).

$P \Leftrightarrow Q$ 其實是由很多 connectives 組合起來的 (以後我們會知道 $P \Rightarrow Q$ 也是如此)，所以我們可以將它看成是 connectives 組合起來的"縮寫"。會特別用縮寫，當然是它會經常被用到，特別是在數學上，所以我們依然先探討在數學上 $P \Leftrightarrow Q$ 的意義。依定義在數學上我們說 $P \Leftrightarrow Q$ 表示 $P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$. 也就是說若 P 成立則 Q 一定成立, 另一方面若 Q 成立則 P 一定成立. 因此 P,Q 有一個成立時另一個一定也成立. 換言之, $P \Leftrightarrow Q$ 表示若 Q 成立則 P 一定成立而且只有當 Q 成立時才會使得 P 成立 (否則會造成 P 成立但 Q 不成立的情況). 這也是在中文我們將 $P \Leftrightarrow Q$ 稱之為 "P 若且唯若 Q " (或 P 當且僅當 Q) 的原因.

現在我們來看在邏輯上 $P \Leftrightarrow Q$ 的對錯情況. 從前面數學上的意義來看, 我們可以知道 $P \Leftrightarrow Q$ 表示 P 對則 Q 且 Q 對則 P 對. 不會有一對一錯的情況. 因此若 P,Q 有一個錯則另一個一定也是錯的. 也就是說在邏輯上 $P \Leftrightarrow Q$ 是對的表示 P 和 Q 必須是同時是對的或同時是錯的. 所以我們有以下關於關於 $P \Leftrightarrow Q$ 的 truth table.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Question 1.5. 試利用 $P \Rightarrow Q$ 以及 $Q \Rightarrow P$ 的 *truth table* 寫下 $P \Leftrightarrow Q$ 的 *truth table.*

Question 1.6. $P \Leftrightarrow Q$ 和 $Q \Leftrightarrow P$ 是否為 *logically equivalent?* $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R$ 和 $P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)$ 是否為 *logically equivalent?* $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$ 是否有意義?

邏輯上 $P \Leftrightarrow Q$ 對錯的情況, 和數學上的情況很一致, 大家應該覺得較為自然. 現在我們利用 $P \Leftrightarrow Q$ 來解釋為何邏輯上只要 P 是錯的, 不管 Q 的對錯, $P \Rightarrow Q$ 都定義為對的. 當然了, 因為 $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ 就是 $P \Leftrightarrow Q$, 所以當 P,Q 皆為錯時, 為了讓 $P \Leftrightarrow Q$ 為對, 我們當然要定義 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 為對. 所以當 P,Q 皆為錯時, 我們定義 $P \Rightarrow Q$ 為對. 至於 P 錯 Q 對的情形, 由於此時 $Q \Rightarrow P$ 為錯, 不管 $P \Rightarrow Q$ 怎麼定都可以使得 $P \Leftrightarrow Q$ 為錯. 然而此時若 $P \Rightarrow Q$ 定為錯, 將會導致 $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ 和 $P \Leftrightarrow Q$ 皆有相同的 truth table (亦即 equivalent), 此和前述數學上不能由 $P \Rightarrow Q$ 推得 $Q \Rightarrow P$ 相違背, 所以當 P 錯 Q 對的情形, 我們依然定義 $P \Rightarrow Q$ 為對.

最後我們補充 $P \Leftrightarrow Q$ 在英文上的幾種說法. 除了「P if and only if Q」外, 還有

- 「P iff Q」
- 「P is equivalent to Q」
- 「P is necessary and sufficient for Q」

1.2. Logical Equivalence and Tautology

前面我們介紹過 logical equivalence 的概念. 我們可以利用 logical equivalence 的一些規則推導出更多的 logical equivalences. 這樣的好處是不必每次都用 Truth table 來探討有關 logical equivalence 的問題.

第一個常見的 logical equivalence 的使用規則是: 我們可以將 logically equivalent 的兩個 statement forms 其中同一個變數用其他的 statement form 取代, 仍可得到 logical equivalence. 例如已知 $(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P)$, 我們可將 P 用 $P \Rightarrow Q$ 取代得

$$((P \Rightarrow Q) \wedge Q) \sim (Q \wedge (P \Rightarrow Q)).$$

這個規則的原因很簡單, 因為既然 logically equivalent 的 statement forms 有相同的 truth table, 我們將其中某個變數任意變換當然最後所得新的 statement forms 仍會有相同的 truth table. 同樣的道理, 我們可以將其中某個變數用兩個 (或好幾個) logically equivalent 的 statement forms 取代, 最後所得新的 statement forms 仍為 logically equivalent. 例如已知 $(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P)$ 以及 $(R \vee S) \sim (S \vee R)$, 所以可以將 $(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P)$ 左邊的 P 用 $R \vee S$ 取代, 而右邊的 P 用 $S \vee R$ 取代得

$$((R \vee S) \wedge Q) \sim (Q \wedge (S \vee R)).$$

還有一個常用的規則是, 如果兩個 statement forms A, B 是 logically equivalent 而 B 和另一個 statement form C 也是 logically equivalent, 那麼 A 和 C 也是 logically equivalent. 例如我們有 $((P \wedge Q) \vee R) \sim ((Q \wedge P) \vee R)$, 也有 $((Q \wedge P) \vee R) \sim (R \vee (Q \wedge P))$, 故可得

$$((P \wedge Q) \vee R) \sim (R \vee (Q \wedge P)).$$

這個規則會成立的原因仍然由 truth table 的全等可以得到.

利用這些規則我們可以不必藉由 truth table 很容易推得一些 statement forms 為 logically equivalent. 簡單來說我們可以將 logically equivalent 如“等號”一樣運用. 我們前面學過的 logical equivalences, 例如 $\wedge$ 的交換性和 $\vee$ 的交換性, 即

$$(P\wedge Q)\sim(Q\wedge P),\quad (P\vee Q)\sim(Q\vee P) \tag{1.1}$$

以及 $\wedge$ 的結合性和 $\vee$ 的結合性, 即

$$((P\wedge Q)\wedge R)\sim(P\wedge(Q\wedge R)),\quad ((P\vee Q)\vee R)\sim(P\vee(Q\vee R)) \tag{1.2}$$

還有 $\wedge,\vee$ 之間的分配性質, 即

$$((P\wedge Q)\vee R)\sim((P\vee R)\wedge(Q\vee R)),\quad ((P\vee Q)\wedge R)\sim((P\wedge R)\vee(Q\wedge R)) \tag{1.3}$$

都是常用來幫助我們推導許多 logical equivalences 的工具.

Example 1.2.1. 考慮 $(P\wedge Q)\vee(P\vee Q)$ 這一個 statement form. 利用式子 (1.3) 中的 $((P\wedge Q)\vee R)\sim((P\vee R)\wedge(Q\vee R))$, 將 R 用 $P\vee Q$ 取代, 我們有

$$(P\wedge Q)\vee(P\vee Q)\sim((P\vee(P\vee Q))\wedge(Q\vee(P\vee Q))). \tag{1.4}$$

再由 $(P\vee(P\vee Q))\sim((P\vee P)\vee Q)$ 以及 $(Q\vee(P\vee Q))\sim(Q\vee(Q\vee P))\sim((Q\vee Q)\vee P)$ 得

$$((P\vee(P\vee Q))\wedge(Q\vee(P\vee Q))\sim(((P\vee P)\vee Q)\wedge((Q\vee Q)\vee P)). \tag{1.5}$$

很容易檢查 $(P\vee P)\sim P$ 以及 $(Q\wedge Q)\sim Q$, 故知

$$(((P\vee P)\vee Q)\wedge((Q\vee Q)\vee P))\sim((P\vee Q)\wedge(Q\vee P))\sim(P\vee Q). \tag{1.6}$$

最後連結式子 (1.4), (1.5), (1.6), 得

$$((P\wedge Q)\vee(P\vee Q))\sim(P\vee Q).$$

當一個 statement form 其 truth table 在任何情況之下皆為對, 我們稱此 statement form 為 *tautology*. 意即它是重複多餘的. 例如 $P\Leftrightarrow P$ 的 truth table 為

P	$P\Leftrightarrow P$
T	T
F	T

,

故 $P\Leftrightarrow P$ 為 tautology.

Question 1.7. $P\Rightarrow P$ 是否為 *tautology?* $P\Rightarrow(P\Rightarrow P)$ 是否為 *tautology?*

Tautology 雖然有重複多餘的意思, 但它在邏輯上仍是有意思的. 它可以幫我們用另一種方法來詮釋 logically equivalent. 當兩個 statement forms A,B 為 logically equivalent 時, 因為 A,B 的對錯情況一致, 我們有 $A\Leftrightarrow B$ 恆為對. 意即 $A\Leftrightarrow B$ 為 tautology. 反之, 當 $A\Leftrightarrow B$ 為 tautology 時, 由於 A,B 的對錯情形一致, 它們有相同的 truth table. 意即 $A\sim B$. 我們有以下的性質.

Proposition 1.2.2. 假設 A,B 為兩個 *statement forms.* 則 A 和 B 為 *logically equivalent* 等同於 $A\Leftrightarrow B$ 為 *tautology.*

其實在前面的說明中, 我們先假設 $A \sim B$ 成立推得 $A \Leftrightarrow B$ 為 tautology (即若 $A \sim B$ 則 $A \Leftrightarrow B$ 為 tautology), 後又由 $A \Leftrightarrow B$ 為 tautology 推得 $A \sim B$. 故 Proposition 1.2.2 可以說成 $A \sim B$ 若且唯若 $A \Leftrightarrow B$ 為 tautology.

Question 1.8. 假設 A,B 為兩個 *statement forms.* 若 $A \sim B$ 可否推得 $A \Rightarrow B$ 為 *tautology?* 若 $A \Rightarrow B$ 為 *tautology* 可否推得 $A \sim B$*?*

Question 1.9. 假設 A,B,C 為 *statement forms.* 若 $A \Leftrightarrow B$ 和 $B \Leftrightarrow C$ 皆為 *tautology,* 是否可推得 $A \Leftrightarrow C$ 為 *tautology?*

和 tautology 相反的是所謂的 *contradiction* (矛盾). 它指的是一個 statement form 在任何情況之下皆為錯的. 關於 contradiction, 我們會在下一節介紹 “not” 之後再探討.

Question 1.10. 假設 A,B 為 *statement forms.*

(1) 若 A 為 *tautology,* 試說明 $(A \wedge B) \sim B$ 並說明 $A \vee B$ 為 *tautology.*

(2) 若 A 為 *contradiction,* 試說明 $(A \vee B) \sim B$ 並說明 $A \wedge B$ 為 *contradiction.*