

1.3. Not and Contradiction

我們介紹 “not” 以及和 not 有關的 equivalences. 本節內容分量比前面幾節重, 而且許多情形很可能和你的直覺不同. 希望大家能好好熟習, 糾正錯誤的直覺, 而將正確觀念成為你的本能反應而不是盲目地記誦.

Not 有否定和相反的意思, 給定一個 statement P , 我們用 $\neg P$, 來表示 not P , 一般稱為 “非 P ”. 它的定義就是當 P 為對時, $\neg P$ 就為錯. 反之, 當 P 為錯時, $\neg P$ 就為對. 所以我們有以下 $\neg P$ 的 truth table.

P	$\neg P$
T	F
F	T

利用這個定義, 我們馬上有

$$P \sim \neg(\neg P). \quad (1.7)$$

Not P 雖然定義簡單, 但是對於由許多 connectives 連結的 statement 取 not 之後, 其對錯狀況就較複雜了. 例如 $\neg(P \wedge Q)$, 或許很多人會誤以為是 $(\neg P) \wedge (\neg Q)$, 不過檢查一下 truth table 可得

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	T	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	F	T	T	T

很明顯看出, 在 P 對 Q 錯或 P 錯 Q 對時, $\neg(P \wedge Q)$ 和 $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ 是不同的. 事實上, 利用 truth table, 我們可得

$$\neg(P \wedge Q) \sim (\neg P) \vee (\neg Q). \quad (1.8)$$

我們藉由大家熟知的數學例子來理解這個事實. 考慮 $0 \leq x \leq 1$, 這表示 $x \leq 1$ and $x \geq 0$. 它的相反, 大家都知是 $x > 1$ or $x < 0$. 我們可以任取一個數 x 令 P 為 $x \leq 1$ 這一個 statement, 而 Q 為 $x \geq 0$, 則 $\neg P$, $\neg Q$ 分別為 $x > 1$, $x < 0$. 也就是說 $0 \leq x \leq 1$ 可以用 $P \wedge Q$ 表示而 $x > 1$ or $x < 0$ 就是 $(\neg P) \vee (\neg Q)$. 由此可以看出 $\neg(P \wedge Q)$ 和 $(\neg P) \vee (\neg Q)$ 為 logically equivalent, 而不是 $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ (否則會得到 $x > 1$ and $x < 0$ 這個矛盾).

我們可以用上一節有關於 statement form 的 logically equivalent 的規則來處理 not. 例如將式子 (1.8) 中的 P , Q 分別用 $\neg P$ 和 $\neg Q$ 取代, 可得

$$\neg((\neg P) \wedge (\neg Q)) \sim (\neg(\neg P)) \vee (\neg(\neg Q)).$$

再利用 $\neg(\neg P) \sim P$, 得

$$\neg((\neg P) \wedge (\neg Q)) \sim (P \vee Q).$$

最後兩邊取 not, 得

$$\neg(P \vee Q) \sim (\neg P) \wedge (\neg Q). \quad (1.9)$$

例如考慮 $x \geq 0$ 的情形, 我們知它的相反為 $x < 0$. 若令 P, Q 分別為 $x > 0, x = 0$, 則 $x \geq 0$ 即為 $P \vee Q$. 此時 $\neg P$ 為 $x \leq 0$, $\neg Q$ 為 $x \neq 0$. 而 $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ 為 $x \leq 0$ and $x \neq 0$, 即為 $x < 0$ 也就是 $x \geq 0$ 的相反.

式子 (1.7), (1.8), (1.9) 對於推導和 not 有關的 statement forms 之間的 logical equivalence 相當重要. 其中式子 (1.8), (1.9) 稱為 *DeMorgan's laws*.

接下來我們自然會問, 怎樣的 statement form 會和 $\neg(P \Rightarrow Q)$ logically equivalent 呢? 或許大家會認為是 $P \Rightarrow \neg Q$, 不過利用 truth table 檢查一下, 大家會發現在 P 是對的時 $P \Rightarrow Q$ 和 $P \Rightarrow \neg Q$ 確實對錯相反, 但是當 P 為錯時 $P \Rightarrow Q$ 和 $P \Rightarrow \neg Q$ 皆為對. 所以 $\neg(P \Rightarrow Q)$ 和 $P \Rightarrow \neg Q$ 並不是 logically equivalent, 千萬要記住.

Question 1.11. 試寫下會使得 $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ 為對的所有實數 x , 也寫下會使得 $x \geq 0 \Rightarrow x < 1$ 為對的所有實數 x . 它們是否相反呢?

大家常忽略的就是 $P \Rightarrow Q$ 中 P 錯的情況, 而造成邏輯的錯誤, 千萬要注意. 不過另一方面, 若 A, B 為 statement form 且 A 為 tautology, 那麼 $\neg(A \Rightarrow B)$ 就和 $A \Rightarrow \neg B$ 為 logically equivalent. 主要的原因是, A 既然全為對, 那麼 $A \Rightarrow B$ 的對錯完全會和 B 的對錯完全一致了.

Question 1.12. 試寫下會使得 $x^2 \geq 0 \Rightarrow x > 0$ 為對的所有實數 x , 也寫下會使得 $x^2 \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$ 為對的所有實數 x . 它們是否相反呢?

要處理 $\neg(P \Rightarrow Q)$ 會和什麼為 logically equivalent, 我們可以換一個角度來看 $P \Rightarrow Q$. 首先回顧一下 $P \Rightarrow Q$ 較通俗的說法是 P 對則 Q 一定對. 所以我們知道 Q 會對, 除非 P 是錯的. 也就是說要不是 Q 對, 要不然就是 P 錯. 這讓我們想到 $Q \vee \neg P$ 這一個 statement form. 事實上用 truth table 檢驗

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

我們得到

$$(P \Rightarrow Q) \sim (Q \vee \neg P). \quad (1.10)$$

利用 $(Q \vee \neg P) \sim ((\neg P) \vee Q)$ 以及 $\neg(\neg Q) \sim Q$, 我們得 $(P \Rightarrow Q) \sim ((\neg P) \vee \neg(\neg Q))$, 再利用式子 (1.10) 得 $((\neg P) \vee \neg(\neg Q)) \sim ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$, 故知

$$(P \Rightarrow Q) \sim ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P)). \quad (1.11)$$

這和我們提過 $P \Rightarrow Q$ 為對, 表示若 Q 為錯則 P 一定錯, 相吻合.

利用式子 (1.10), 我們可得 $\neg(P \Rightarrow Q) \sim \neg(Q \vee \neg P)$. 而由 DeMorgan's laws 知

$$\neg(Q \vee \neg P) \sim ((\neg Q) \wedge \neg(\neg P))$$

故得

$$\neg(P \Rightarrow Q) \sim (P \wedge (\neg Q)). \quad (1.12)$$

式子 (1.10), (1.11), (1.12) 是我們將來處理“若 P 則 Q ”這種類型的論述時常用的 logical equivalences.

由式子 (1.10) 我們知道, 所有的 statement form 都可以利用 logical equivalence 寫成 $\neg, \wedge, \vee$ 的組合. 例如由 $P \Leftrightarrow Q$ 的定義, 我們可得

$$(P \Leftrightarrow Q) \sim (Q \vee (\neg P)) \wedge (P \vee (\neg Q)). \quad (1.13)$$

再利用 $\wedge, \vee$ 的分配性 (即式子 (1.3)) 推得

$$(P \Leftrightarrow Q) \sim (P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge (\neg Q)). \quad (1.14)$$

因此我們可以用 DeMorgan's laws, 式子 (1.7), 以及 $\wedge, \vee$ 之間的關係式 (式子 (1.1), (1.2), (1.3)), 推導出一個 statement form 取 not 之後的 logical equivalence. 例如式子 (1.13) 取 not 可得

$$\neg(P \Leftrightarrow Q) \sim ((\neg Q) \wedge P) \vee ((\neg P) \wedge Q).$$

有趣的是, 若比較式子 (1.14) 中的 Q 用 $\neg Q$ 取代後的結果, 我們得到

$$\neg(P \Leftrightarrow Q) \sim (P \Leftrightarrow \neg Q).$$

以上差不多就是我們需要了解有關“not”的性質。為了方便起見, 我們將比較常用的再列出如下:

- | | |
|---|---|
| (1) $P \sim \neg(\neg P)$ | (2) 若已知 $P \sim Q$ 則 $\neg P \sim \neg Q$ |
| (3) $\neg(P \wedge Q) \sim (\neg P) \vee (\neg Q)$ | (4) $\neg(P \vee Q) \sim (\neg P) \wedge (\neg Q)$ |
| (5) $(P \Rightarrow Q) \sim ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P)) \sim (Q \vee \neg P)$ | (6) $\neg(P \Rightarrow Q) \sim (P \wedge (\neg Q))$ |
| (7) $(P \Leftrightarrow Q) \sim (P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge (\neg Q))$ | (8) $\neg(P \Leftrightarrow Q) \sim (P \Leftrightarrow \neg Q) \sim (\neg P \Leftrightarrow Q)$ |

最後我們再談一下 contradiction, 回顧一下這表示一個 statement form 在任何情況之下皆為錯的。當 A 為 statement form 時, $\neg A$ 的對錯完全和 A 的對錯相反, 所以 $A \Leftrightarrow \neg A$ 的 truth table 在任何情況之下皆為錯, 可知 $A \Leftrightarrow \neg A$ 為 contradiction. 反之, 若 B 為 statement form 且 $A \Leftrightarrow B$ 為 contradiction, 表示在任何情況下 A 和 B 的對錯情況相反, 可知 $B \sim \neg A$. 因此我們有以下和 Proposition 1.2.2 相對應的性質.

Proposition 1.3.1. 假設 A, B 為兩個 statement forms. 則 $\neg A$ 和 B 為 logically equivalent 等同於 $A \Leftrightarrow B$ 為 contradiction.