1.4. Quantifiers

我們已經了解在已知各 statement 的對錯情況之下它們用 connective 以及 not 連接之後其對錯的狀況, 我們也知道一個 statement form 的否定為何. 不過一個單一的 statement, 很可能就很複雜, 不容易判斷對錯. 例如在數學上一個 statement 常常會有一些 quantifier (量詞) 出現, 而增加了判斷對錯的困難度. 在本節中我們將介紹常見的 quantifiers, 並探討它們取否定的情形.

數學上常見的 quantifiers 有以下幾種:

- "for all", "for every" (即對所有的), 常用 $\forall$ 表示.
- "there exists", "there is" (即存在, 可以找到), 常用 $\exists$ 表示.
- "there is a unique" (即存在唯一的), 常用 $\exists!$ 表示.

$\exists!$ 牽涉到唯一性的問題, 以後我們在談論證明方法時會提到它, 這裡我們先探討 $\forall$ 和 $\exists$. 首先要說明的是, 在談論這些 quantifiers 時必須說明清楚是在怎樣的集合內. 比方說對所有的整數和對所有的有理數就是完全不同的兩回事, 而存在一個自然數和存在一個偶數也不同. 不過由於我們僅介紹這些 quantifiers 的概念, 而不觸及證明. 所以這裡為了簡單起見我們說明的例子考慮的都是整個實數. 例如我們說 $\forall x$ 或 $\exists x$, 它們分別表示的就是 for all x in $\mathbb{R}$ 或 there exists an x in $\mathbb{R}$, 以後就不再聲明指的是實數了.

我們先看簡單的例子: $\forall x,\ x^2 \geq 0$. 指的就是所有的實數 x 皆會滿足 $x^2 \geq 0$. 我們知道這個 statement 是對的, 因為每一個實數 x 都對, 沒有例外. 這類的 statement 我們可以用以下的形式表示 "$\forall x,\ P(x)$". 這裡 $P(x)$ 指的是和 x 有關的性質 (例如上例中 $P(x)$ 就是 $x^2 \geq 0$). 它指的就是所有的 x 皆會滿足 $P(x)$ 這個性質. 這個 statement 要對就必須所有的 x 都對, 一個都不能錯. 例如 $\forall x,\ x^2 > 0$ 便是錯的 ($x = 0$ 就不成立).

類似的, 我們可以用 "$\exists x,\ P(x)$" 來表示, 存在 x 使得 $P(x)$ 成立. 這個 statement 要對, 只要能找到一個 x 使得 $P(x)$ 成立即可. 注意它並沒有說有多少個會對, 有可能很多, 有可能只有一個, 所以只要找到一個對即可 (這就是英文用 there exists 的原因). 上面提過 $\forall x,\ x^2 > 0$ 是錯的, 但若改為 $\exists x,\ x^2 > 0$ 便是對的 (取 $x = 1$, 即可). $\exists x,\ x^2 = 0$ 也是對的；但 $\exists x,\ x^2 < 0$ 便是錯的（因為我們僅考慮實數）。

$\forall$ 和 $\exists$ 有著有趣的關係, 例如 "$\forall x,\ P(x)$" 是對的話, 那麼 "$\exists x,\ P(x)$" 就一定對 (只要挑隨便一個 x 即可). 不過反過來就不對. 你不能隨便挑幾個 x 符合 $P(x)$, 就聲稱對所有的 x 都會符合 $P(x)$. 另外 $\forall$ 和 $\exists$ 在取否定時關係就更密切了. 當你發現 "$\forall x,\ P(x)$" 有可能錯時, 如何說明它是錯的呢? 前面說過 "$\forall x,\ P(x)$" 只要有一個 x 不符合 $P(x)$ 就是錯的, 所以要否定它, 我們只要找到一個 x 讓 $P(x)$ 不成立即可. 用符號表示就是 $\exists x,\ \neg P(x)$. 例如前面提過 $\forall x,\ x^2 > 0$ 是錯的, 因為我們發現 $\exists x,\ x^2 \leq 0$.

再次提醒，很多同學會誤以為 "$\forall x,\ P(x)$" 的否定是 "$\forall x,\ \neg P(x)$". 雖然若 "$\forall x,\ \neg P(x)$" 是對的可以知道 "$\forall x,\ P(x)$" 是錯的. 但是 "$\forall x,\ P(x)$" 是錯的, 並不表示 "$\forall x,\ \neg P(x)$" 是對的. 所以不能說 "$\forall x,\ P(x)$" 的否定是 "$\forall x,\ \neg P(x)$". 例如 $\forall x,\ x^2 > 0$ 是錯的, 但 $\forall x,\ x^2 \leq 0$ 也是錯的, 唯有 $\exists x,\ x^2 \leq 0$ 才會對. 大家千萬注意, 不要弄錯. 總而言之我們有以下的 logical equivalence

$$\neg(\forall x, P(x)) \sim (\exists x, \neg P(x)). \tag{1.15}$$

同理要否定 “$\exists x$, $P(x)$”, 表示找不到 x 使得 $P(x)$ 成立. 所以我們便需說明所有的 x 皆不滿足 $P(x)$, 也就是說 $\forall x$, $\neg P(x)$. 同樣的, 很多同學會誤以為 “$\exists x$, $P(x)$” 的否定是 “$\exists x$, $\neg P(x)$”. 這是錯的, 因為找到 x 不滿足 $P(x)$ 還是有可能找到另一個 x 會滿足 $P(x)$. 因此光由 “$\exists x$, $\neg P(x)$” 並不能否定 “$\exists x$, $P(x)$”. 總而言之我們有以下的 logical equivalence

$$\neg(\exists x, P(x)) \sim (\forall x, \neg P(x)). \tag{1.16}$$

Question 1.13. 試利用式子 *(1.15)* 以及 *logical equivalence* 的規則推導出式子 *(1.16)*.

Quantifier 有時會發生在兩個或更多變數的情形, 這裡我們僅探討兩個變數的情形, 更多變數的情況可以依兩個變數的情況類推下去. 所謂兩個變數的情況, 是形如 “$\forall x, \exists y, P(x,y)$” 的 statement, 這裡 $P(x,y)$ 指的是和 x,y 有關的性質. 例如微積分中, 函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限為 l (即 $\lim_{x\to a} f(x) = l$) 的定義 “$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 滿足 $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$” 就是兩個變數的情況. 大致上我們會有下面四種類型的 statement.

$$(1)\forall x, \exists y, P(x,y) \quad (2)\exists x, \forall y, P(x,y) \quad (3)\forall x, \forall y, P(x,y) \quad (4)\exists x, \exists y, P(x,y).$$

(1) 指的是: 對於所有的 x 皆可找到 y 使得 $P(x,y)$ 成立. 注意這裡 x 的部分先講, 再提存在 y, 所以這個存在的 y 並不是固定的, 它可能會隨著 x 的選取而變動. 例如 $\forall x, \exists y, x+y=0$ 這個 statement 是對的. 它說任意選取 x, 皆可找到 y 滿足 $x+y=0$. 這裡 y 會隨著 x 而變動, 即 $y=-x$. 例如 $x=1$ 時 $y=-1$, 而 $x=2$ 時 $y=-2$. 這裡 x,y 的先後順序很重要, 千萬要注意.

(2) 指的是: 存在 x 使得對所有的 y 都會滿足 $P(x,y)$. 注意這裡存在的 x 先講, 再提所有的 y, 所以這個存在的 x 並是固定的, 它不可以隨著 y 而變動. 例如 $\exists x, \forall y, x+y=y$ 這個 statement 是對的. 它是說可以找到 x 讓任意的 y 皆滿足 $x+y=y$. 這裡 x 找到後便固定下來了, 即 $x=0$. 不過例如在 (1) 的情形我們知道 $\forall x, \exists y, x+y=0$ 這個 statement 是對的, 但若將 $\forall x$ 和 $\exists y$ 的順序交換得 $\exists y, \forall x, x+y=0$ 這個 statement 便是錯的. 因為我們無法找到一個固定的 y 使的所有的 x 都會滿足 $x+y=0$. 再次強調, 這裡先後順序很重要, “$\forall x, \exists y, P(x,y)$” 和 “$\exists y, \forall x, P(x,y)$” 雖然只是 $\forall x$ 和 $\exists y$ 先後順序調動, 但意義完全不同千萬要注意.

Question 1.14. $\exists x, \forall y, x+y=y$ 這個 *statement* 是對的, 但若換成 $\forall y, \exists x, x+y=y$, 是否為對呢? 又換成 $\forall x, \exists y, x+y=y$ 及 $\exists y, \forall x, x+y=y$, 哪一個對呢?

Question 1.15. 假設 $f(x,y), g(x,y)$ 皆為兩個變數的多項式. 已知 “$\forall x, \exists y, f(x,y)=0$” 和 “$\exists y, \forall x, g(x,y)=0$” 皆為對. 試問 $f(x,y)=0$ 和 $g(x,y)=0$ 在坐標平面上的圖形哪一個一定會包含一條水平直線, 哪一個一定會和鉛直線 $x=101$ 相交?

(3) 和 (4) 的情況較為單純. (3) 指的是任取一個 x, 對於任意的 y 都會使得 $P(x,y)$ 成立. 利用坐標平面的看法, 我們可以說平面上任一點 (x,y) 都會使得 $P(x,y)$ 成立, 所以此時

$\forall x$ 和 $\forall y$ 變換順序並不會改變整個 statement. 而 (4) 指的是可以找到 x 使得有一個 y 滿足 $P(x,y)$. 利用坐標平面的看法, 我們可以說平面上存在一點 (x,y) 使得 $P(x,y)$ 成立. 因此此時 $\exists x$ 和 $\exists y$ 變換順序並不會改變整個 statement. 例如若我們在 $x=3$ 時, 可找到 $y=7$ 使得 $P(3,7)$ 是正確的, 此時我們也可以說 $y=7$ 時, 可找到 $x=3$ 使得 $P(x,y)$ 為對. 總而言之 (3), (4) 因兩個變數的 quantifier 皆相同, 所以 x,y 的先後不重要. (3) 一般會簡化成 $\forall x, y$, $P(x,y)$, 而 (4) 簡化成 $\exists x, y$, $P(x,y)$.

接下來我們來看有兩個變數的 statement 取否定時 quantifier 的變化情形. 在 (1) 的情形, 即 "$\forall x, \exists y, P(x,y)$". 此時, 我們可以把 "$\exists y, P(x,y)$" 看成是 $H(x)$ 這樣的條件. 所以原 statement 可看成 $\forall x, H(x)$. 利用式子 (1.15), 我們知道它的否定為 $\exists x, \neg H(x)$. 然而式子 (1.16) 告訴我們 $\neg H(x) \sim (\forall y, \neg P(x,y))$, 所以我們得

$$\neg(\forall x, \exists y, P(x,y)) \quad \sim \quad (\exists x, \forall y, \neg P(x,y)).$$

同理我們可得

$$\begin{aligned} \neg(\exists x, \forall y, P(x,y)) &\quad \sim \quad (\forall x, \exists y, \neg P(x,y)) \\ \neg(\forall x, \forall y, P(x,y)) &\quad \sim \quad (\exists x, \exists y, \neg P(x,y)) \\ \neg(\exists x, \exists y, P(x,y)) &\quad \sim \quad (\forall x, \forall y, \neg P(x,y)). \end{aligned}$$

例如前面所提, 函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x\to a} f(x) = l$ 的否定應為

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \neg(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

利用式子 (1.12) 我們知

$$\neg(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon) \quad \sim \quad ((0 < |x-a| < \delta) \wedge (|f(x) - l| \geq \varepsilon)).$$

所以 $\lim_{x\to a} f(x) = l$ 的否定應為

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, (0 < |x-a| < \delta) \wedge (|f(x) - l| \geq \varepsilon).$$

最後, 我們說明一下 $\forall$ 和 $\exists$ 在習慣上用法的差異. 在習慣上的用語, 我們常會省略 $\forall x$. 例如 $x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9$, 這一個 statement 嚴格來說應寫成 $\forall x, (x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9)$. 也就是說, 在邏輯上我們說這個 statement 是對的應該是對所有的實數 x 都是對的. 給定一實數 x, 當 $x \geq 3$, 當然可得 $x^2 \geq 9$. 而當 $x < 3$, 因為它已不符合 $x \geq 3$ 的前提, 我們知道此時 $x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9$ 也是對的. 所以我們可以認定 $\forall x, (x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9)$ 是對的 (這也是邏輯上定義 P 錯時 $P \Rightarrow Q$ 為對的用意, 希望同學能體會). 要注意的是 $\exists x$ 就絕不能省略, 否則就弄不清楚是 $\forall x$ 或 $\exists x$ 了.

總而言之, 當我們看到「$P(x) \Rightarrow Q(x)$」這樣的說法，可以看成「$\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$」。也就是說，對所有的 x, 皆會使得 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 成立。由於邏輯上當 x 會使得 $P(x)$ 不成立時，$P(x) \Rightarrow Q(x)$ 依然成立，所以僅剩下那些使得 $P(x)$ 成立的 x 需要探討。也因此 "對所有的 x, 皆會使得 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 成立" 就表示那些剩下的 x (即 $P(x)$ 成立) 皆會使得 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 成立 (即 $Q(x)$ 成立)。因此在數學上對於「$P(x) \Rightarrow Q(x)$」, 我們可以將之解讀為「只要 x 符合 $P(x)$ 也會符合 $Q(x)$」這種 statement.

至於 $\exists$ 的用法, 就要注意了。在數學上，我們幾乎不會有「$\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$」這樣的用法。這個 statement 當然在邏輯上是說得通的，也就是說存在 x 使得 "$P(x) \Rightarrow Q(x)$" 成立。讓我們分兩種情況來探討這個 statement 在邏輯上的意義。

(1) 存在 x 使得 $P(x)$ 不成立：此時利用此 x 知 $P(x)$ 不成立，也因此不管 $Q(x)$ 是否成立, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 是成立的。所以「$\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$」這個 statement 當然是對的。也就是說，在此情況 $Q(x)$ 這個性質根本沒意義。

(2) 不存在 x 使得 $P(x)$ 不成立：此時表示對所有 x, 皆會使得 $P(x)$ 成立，所以「$\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$」就等同於存在 x 使得 $Q(x)$ 成立。也就是說，在此情況 $P(x)$ 這個性質根本沒意義。

由此可知，數學上應該看不到「$\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$」這樣的 statement. 那我們如何表達「存在一個 x 滿足由 $P(x)$ 成立可得 $Q(x)$」成立呢？因為這個 x 使得 $P(x)$ 成立，所以要 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ 成立就表示 $Q(x)$ 也成立。因此這個說法真的很奇怪，我們應該說「存在一個 x 滿足 $P(x)$ 成立且 $Q(x)$ 成立」，即用「$\exists x, P(x) \wedge Q(x)$」來表達. 例如當我們要表達 $\sqrt{10}$ 是存在的，我們可以說「存在一個大於 0 的實數 x, 滿足 $x^2 = 10$」，因此應寫成「$\exists x, (x > 0) \wedge (x^2 = 10)$」, 而不能寫成「$\exists x, (x > 0) \Rightarrow (x^2 = 10)$」；否則找到任意小於等於 0 的 x 都會使得「$\exists x, (x > 0) \Rightarrow (x^2 = 10)$」為對，就無法讓人知道此和 $\sqrt{10}$ 有什麼關係了。

Question 1.16. 假設 $f(x, y)$ 是一個兩個變數的多項式.「存在一實數 $a > 0$ 使得 $f(a, y) = 0$ 無解」這一個 *statement*, 數學的表示法為何? 並寫出這 *statement* 的否定.