Methods of Proof

學會了簡單的邏輯後, 接下來便是學習如何證明. 在本章中我們將介紹一些證明的方法. 這裡我們只談有關證明的一些基本原則, 而不談證明的技巧, 所以給的例子將會挑選淺顯易懂的證明.

2.1. IF-Then 的證明

在數學中最常看到的就是這種 $P \Rightarrow Q$ 的 statement. 要證明這種 statement, 我們大致上有 **direct method**, **contrapositive method** 和 **contradiction method** 三種方法.

2.1.1. Direct Method. 所謂 direct method 指的就是直接證明, 也就是直接利用 P 成立的假設得到 Q 成立. (再次強調, 我們不必管 P 不成立時, Q 會如何). 當我們要證明 $P \Rightarrow Q$ 時, 若覺得 P 的條件已經足夠, 便可以考慮使用直接證明. 例如以下的例子.

Example 2.1.1. 令 p,a,b 為整數. 證明 if $p \mid a$ and $p \mid b$, then $p \mid a+b$.

Proof. 由假設 $p \mid a, p \mid b$, 知存在整數 m,n 使得 $a = pm, b = pn$. 故得

$$a+b = pm+pn = p(m+n).$$

因 $m+n$ 為整數, 得證 $p \mid a+b$. □

有時用直接證明的方法並不能一次到位, 需要借助其他的結果幫忙才能完成. 也就是說或許我們不能直接證出 $P \Rightarrow Q$, 但若證得 $P \Rightarrow R$ 又證得 $R \Rightarrow Q$, 此時便證得 $P \Rightarrow Q$ 了. 這是因為若證得 $P \Rightarrow R$, 表示 P 對的話 R 一定對, 再由 $R \Rightarrow Q$ 知 R 對的話 Q 一定對, 故連結而知 P 對則 Q 一定對, 得證 $P \Rightarrow Q$. 這種利用遞移性的證明通常有一部分是一些常用的性質或是一些 (輔助) 定理。例如以下的例子.

Example 2.1.2. 設 a 為正實數且 $a \neq 1$. 已知若 $a^z = 1$, 則 $z = 0$. 證明若 x,y 為實數滿足 $a^x = a^y$, 則 $x = y$.

Proof. 由於 $a \neq 0$, 對於任何實數 y, 我們知 $a^y \neq 0$, 故由 $a^x = a^y$, 等號兩邊除以 a^y 得 $a^{x-y} = 1$. 又因 $a \neq 1$, 我們知道若 $a^z = 1$, 則 $z = 0$. 故由 $a^{x-y} = 1$ 可得 $x - y = 0$, 得證 $x = y$. □

這個證明的例子中, 我們其實是先證得 $(a^x = a^y) \Rightarrow (a^{x-y} = 1)$, 再由 $(a^{x-y} = 1) \Rightarrow (x = y)$ 得證 $(a^x = a^y) \Rightarrow (x = y)$. 其中我們用了一個大家都知道的事實, 即當 a 為正實數且 $a \neq 1$, 若 $a^z = 1$, 則 $z = 0$. 這個事實是需要證明的，不過不容易用 direct method 證明，等一下我們會利用 contradiction method 來證明.

有時在 direct method 中我們可以分成好幾種情況, 看看哪些情況符合 P 的條件, 然後證得 Q. 這樣的證明方法有時稱為 *proof in cases.* 例如以下的例子.

Example 2.1.3. 假設 x 為實數. 證明 if $x^2 - 3x + 2 < 0$, then $1 < x < 2$.

Proof. 由 $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) < 0$, 我們知可分成 2 種情況, 即

(1) $(x-1) < 0$ and $(x-2) > 0$;

(2) $(x-1) > 0$ and $(x-2) < 0$.

(1) 的情況表示 $x < 1$ 且 $x > 2$. 由於沒有實數 x 會同時滿足 $x < 1$ 以及 $x > 2$, 我們知 (1) 不可能成立, 故推得 (2), 即 $x > 1$ 且 $x < 2$. 證得 $1 < x < 2$. □

注意, 在這個證明中, 有些同學或許會疑惑為什麼是排除 (1), 而不直接驗證 (2) 可得 $x^2 - 3x + 2 < 0$ 呢? 這是錯誤的. 在我們的證明中明明白白表示: 若 x 滿足 $x^2 - 3x + 2 < 0$, 那麼 x 一定會滿足 (1) 或是 (2). 排除 (1) 表示只有 (2) 會對, 所以確定若 x 滿足 $x^2 - 3x + 2 < 0$, 那麼 x 一定滿足 (2). 若僅說 x 滿足 (2) 可得 $x^2 - 3x + 2 < 0$, 而沒有排除 (1), 那麼這是證明 if $1 < x < 2$, then $x^2 - 3x + 2 < 0$, 而不是證 if $x^2 - 3x + 2 < 0$, then $1 < x < 2$. 千萬別搞錯.

Question 2.1. 假設 x 為實數.

(1) *"If* $x^2 - 3x + 2 < 0$, *then* $0 < x < 3$." 和 *"If* $x^2 - 3x + 2 < 0$, *then* $1.3 < x < 1.7$." 這兩個 *statements* 哪一個是對的?

(2) *"If* $0 < x < 3$, *then* $x^2 - 3x + 2 < 0$." 和 *"If* $1.3 < x < 1.7$, *then* $x^2 - 3x + 2 < 0$." 這兩個 *statements* 哪一個是對的?

有時在論證的問題有多種結論例如要論證 $P \Rightarrow Q \wedge R$ 或是 $P \Rightarrow Q \vee R$. 當要論證 $P \Rightarrow Q \wedge R$，我們當然就是證明 P 對則 Q 和 R 都會對。但要證明 $P \Rightarrow Q \vee R$, 就會有點麻煩。因為 $Q \vee R$ 會對表示有可能 Q 對 R 錯；Q 錯 R 對，甚至 Q,R 都對。也因此要推得 $Q \vee R$ 會對，感覺有點麻煩。接下來這個技巧就很好用。我們可以直接僅考慮已知 P 對且 Q 錯的情況，因為如果 Q 對那自然 $Q \vee R$ 是對的。因此，此時我們就只要證明由 P 對 Q 錯可推得 R 對即可。從邏輯來看，因為 $(P \Rightarrow (Q \vee R)) \sim (\neg P \vee (Q \vee R))$, 而 $((P \wedge \neg Q) \Rightarrow R) \sim (\neg(P \wedge \neg Q) \vee R) \sim ((\neg P \vee Q) \vee R))$ 所以 $(P \Rightarrow (Q \vee R)) \sim ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow R)$. 我們看以下的例子。

Example 2.1.4. 證明若 $xy=0$, 則 $x=0$ 或 $y=0$.

Proof. 我們可假設 $xy=0$ 且 $x\neq 0$, 此時因 $x\neq 0$, 可將等式 $xy=0$ 的兩邊除以 x (或說乘以 $1/x$), 得 $y=0$. □

當然了，在證明 $P\Rightarrow(Q\vee R)$ 時，若覺得 $\neg R$ 比較好用，當然可改成證 $(P\wedge\neg R)\Rightarrow Q$.

2.1.2. Contrapositive Method. 我們稱 $(\neg Q)\Rightarrow(\neg P)$ 為 $P\Rightarrow Q$ 這個 statement 的 *contrapositive statement*. 回顧一下, 我們知道 $P\Rightarrow Q$ 和 $(\neg Q)\Rightarrow(\neg P)$ 是 logically equivalent (參見式子 (1.11)). 也就是說 $P\Rightarrow Q$ 和 $(\neg Q)\Rightarrow(\neg P)$ 的對錯是一致的. 因此, 若我們能證明 $(\neg Q)\Rightarrow(\neg P)$ 便證得 $P\Rightarrow Q$ 了.

當要證明 $P\Rightarrow Q$ 時, 若發現 P 的條件似乎不容易幫助我們證明, 而 $\neg Q$ 較容易處理時便可以考慮使用 contrapositive method. 也就是說證明 $(\neg Q)\Rightarrow(\neg P)$. 最常發生的情況就是有不等式的情形. 因為不等式不如等式使用方便, 很多不等式的使用規則其實都是用等式推導的, 所以如果一個 statement 牽涉到不等式, 而它的 contrapositive statement 是等式. 那麼自然用 contrapositive method 會比較容易證明. 我們有以下的例子.

Example 2.1.5. 設 x,y 為實數. 證明 if $x\neq y$, then $x^3\neq y^3$.

當然了, 若你了解 $f(x)=x^3$ 的圖形或利用微積分, 可以知道這一定對的. 不過我們想要用比較基礎的方法處理. 若用 contrapositive method 來證明, 就是先假設 $\neg(x^3\neq y^3)$ (即 $x^3=y^3$), 要證得 $\neg(x\neq y)$ (即 $x=y$).

Proof. 利用 contrapositive method, 首先假設 $x^3=y^3$, 即 $0=x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$. 由 Example 2.1.4 可得 $x-y=0$ 或 $x^2+xy+y^2=0$. 因此可用 proof in cases 處理。

(1) $x-y=0$：此時即 $x=y$.

(2) $x^2+xy+y^2=0$: 此時由
$$x^2+xy+y^2=(x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2.$$
可得 $x+\frac{1}{2}y=0$ 且 $y=0$. 因此得 $x=y=0$.

由於所有情況皆得 $x=y$, 故得證 if $x^3=y^3$ then $x=y$, 也因此得證 if $x\neq y$, then $x^3\neq y^3$. □

當我們利用 contrapositive method 把要證明的 $P\Rightarrow Q$ 改為證明 $\neg Q\Rightarrow\neg P$ 後，就可以用前面所提的 direct method 的方法證明 $\neg Q\Rightarrow\neg P$. 在上例中，我們就是利用遞移性以及 proof in case 處理。

若一個 statement 是由包含 x 的式子的性質, 來推得 x 本身的性質, 由於通常是反過來將 x 代入式子比較容易，此時也是用 contrapositive method 的好時機. 例如以下的簡單例子.

Example 2.1.6. 設 x 為整數. 證明 if x^2 is even (偶數), then x is even.

Proof. 用 contrapositive method, 即證明若 x 為奇數, 則 x^2 為奇數. 然而 x 為奇數, 表示 x 可以寫成 $x = 2n+1$, 其中 n 為整數. 故得證 $x^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1$ 為奇數. □

Question 2.2. 假設 x, y 為整數. 試用 *contrapositive method* 證明 *if $x+y$ is even, then x and y are both even or odd.*

有時用 proof in cases 處理的情況, 也可用 contrapositive method 來證明. 例如 Example 2.1.3 就可以用 contrapositive method 證明. 也就是說, 先假設 $\neg(1 < x < 2)$ (即 $x \geq 2$ or $x \leq 1$) 求得 $\neg(x^2 - 3x + 2 < 0)$ (即 $x^2 - 3x + 2 \geq 0$). 我們看另外的例子.

Example 2.1.7. 設 x, y, a 為正實數. 證明 if $xy = a$, then $x \leq \sqrt{a}$ or $y \leq \sqrt{a}$.

用 proof in cases 證明，需考慮 x, y 所有可能與 $\sqrt{a}$ 的大小關係，要分成好幾種情況。而用 contrapositive method, 我們只要考慮一種情況。

Proof. 用 contrapositive method, 先假設 $\neg((x \leq \sqrt{a}) \vee (y \leq \sqrt{a}))$ (即 $x > \sqrt{a}$ and $y > \sqrt{a}$) 要證得 $\neg(xy = a)$ (即 $xy \neq a$). 然而 x, y, a 為正, 故由 $x > \sqrt{a}$ and $y > \sqrt{a}$ 可得 $xy > (\sqrt{a})^2 = a$, 得證 $xy \neq a$. □

Question 2.3. 利用類似 *Example* 2.1.4 中證明 $P \Rightarrow (Q \vee R)$ 的方法，證明 *Example* 2.1.7.

Question 2.4. 設 x, y, a 為正實數. 請問 *if $xy = a$, then $x \geq \sqrt{a}$ or $y \geq \sqrt{a}$* 是否為對? 若為對, 此和 *Example 2.1.7,* 是否有矛盾?

2.1.3. Contradiction Method. 回顧式子 (1.10) 告訴我們 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \vee \neg P$ 是 logically equivalent. 也就是說, 若我們能證明 $Q \vee \neg P$ 就等同證明了 $P \Rightarrow Q$. 然而 $Q \vee \neg P$ 是“或”的情況, 處理起來有點像前面提過的 proof in cases, 沒有太多的優勢. 不過若考慮 $\neg(P \Rightarrow Q)$, 此時和 $(\neg Q) \wedge P$ 為 logically equivalent (參見式子 (1.12)). 因此若能證明 $(\neg Q) \wedge P$ 一定是錯的, 便證得 $P \Rightarrow Q$ 為對. 這就是所謂的 contradiction method.

Contradiction method 的處理方法就是, 先假設 $(\neg Q)$ 和 P 皆為對, 再從中推導出與我們知道一定對的 statement 相矛盾. 如此一來便表示 $(\neg Q)$ 和 P 是錯的, 而得證 $P \Rightarrow Q$. 這個方法的最大優點就是它一次便同時假設 P 和 $\neg Q$ 為對, 給我們較多的資訊去推導, 而不像 direct method 僅假設 P 為對, 或 contrapositive method 僅假設 $\neg Q$ 為對. 它的缺點就是, 不像 direct method 或 contrapositive method 明確地知道要推導甚麼 (即由 P 推導出 Q 或由 $\neg Q$ 推導出 $\neg P$), 而是要推導出一個“未知”的矛盾.

當要證明 $P \Rightarrow Q$ 時, 若發現單獨 P 的條件或是單獨 $\neg Q$ 的條件似乎不容易幫助我們證明, 這時便可以考慮 P 和 $\neg Q$ 的條件可同時使用的 contradiction method. 我們看以下的例子.

Example 2.1.8. 設 r 為實數, 證明 if $r^2 = 2$, then r is irrational (無理數).

我們幾乎沒有直接的方法證明一個數是無理數, 所以不可能用 direct method. 而若用 contrapositive method 雖可先假設 r 為有理數, 但要推得 $r^2 \neq 2$ 這個不等式. 前面已提過不等式的推導並不容易, 所以我們用 contradiction method 來證明.

Proof. 用 contradiction method, 即假設 r 為有理數且滿足 $r^2 = r$, 希望能得到矛盾. 依假設 r 為有理數, 表示 r 可以寫成 $r = (m/n)$, 其中 m, n 為整數. 現若 m, n 皆為偶數, 我們可以約掉 2, 如此一直下去, 我們可假設 m, n 為一奇一偶或皆為奇數. 然而 $r^2 = 2$, 即 $m^2 = 2n^2$ 為偶數, 故由 Example 2.1.6 知 m 必為偶數. 也就是說 m 可寫成 $m = 2m'$, 其中 m' 為整數. 此時得 $4m'^2 = 2n^2$, 即 $n^2 = 2m'^2$ 為偶數. 故再由 Example 2.1.6 知 n 亦為偶數. 此與當初假設 m, n 為一奇一偶或皆為奇數相矛盾. 故得證 if $r^2 = 2$, then r is irrational. $\square$

從 Example 2.1.8 中我們應可體會, 當初若沒有想到將 $r = (m/n)$ 中分子分母的 2 約乾淨, 就無法推出矛盾了. 所以用 contradiction method 證明的困難處就是要 "製造矛盾".

回顧在 Example 2.1.2 的證明中, 我們用了一個事實, 即當 $a \neq 1$ 且為正實數時, 若 z 為實數 $a^z = 1$, 則 $z = 0$. 我們可以用 contradiction method 來證明這個 statement.

Example 2.1.9. 設 $a \neq 1$ 且為正實數. 證明若 z 為實數滿足 $a^z = 1$, 則 $z = 0$.

若要用反證法, 我們必須假設 $z \neq 0$ 且 $a^z = 1$ 而得到矛盾. 要如何製造矛盾呢? 我們知道這個 statement $a \neq 1$ 是重要的前提 (否則它會錯), 所以矛盾的關鍵是 $a \neq 1$.

Proof. 我們利用 contradiction method, 先假設 $z \neq 0$ 且 $a^z = 1$. 此時由於 $z \neq 0$, 我們知 $1/z$ 是存在的, 故利用 $(a^z)^{1/z} = a$ 以及 $a^z = 1$, 得

$$a = (a^z)^{1/z} = 1^{1/z} = 1.$$

此與已知 $a \neq 1$ 相矛盾, 得證若 $a^z = 1$, 則 $z = 0$. $\square$

2.1.4. If and Only If 的證明. $P \Leftrightarrow Q$ 的證明基本上就是要證明 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$. 大家或許看過有些證明由於每一個步驟逆推回去也是對的, 所以在推導完 $P \Rightarrow Q$ 後便說反向亦然, 而得證 $P \Leftrightarrow Q$. 在這裡特別提醒大家, 除非你確認每一個步驟逆推回去也是對的, 千萬不要隨便認定反向亦然, 就說得證 $P \Leftrightarrow Q$. 尤其在以後許多進階一點的定理, 很可能兩邊的推導方式是用到完全不同的概念或原理. 所以證明 $P \Leftrightarrow Q$ 還是要分別證明 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 為宜.

例如設 a 為整數要證明 "a^2 為偶數 $\Leftrightarrow$ a 為偶數", 大家可能會先證 $\Leftarrow$ 這個方向. 此時可令 $a = 2n$, 其中 n 為整數, 便得 $a^2 = (2n)^2 = 4n^2$ 為偶數. 但這個推導方式, 逆推就有問題了. 因為知道 a^2 為偶數, 為何 a^2 一定可以寫成 $4n^2$ 這個樣子呢? 所以 $\Rightarrow$ 這個方向還是要推導的 (我們在 Example 2.1.6 已證明過了).

由於 $(P \Rightarrow Q) \sim ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$ 且 $(Q \Rightarrow P) \sim ((\neg P) \Rightarrow (\neg Q))$ 我們知 $P \Leftrightarrow Q$ 和 $(\neg P) \Leftrightarrow (\neg Q)$ 為 logically equivalent. 有的同學會覺得若證明 $P \Leftrightarrow Q$ 較麻煩, 可考慮證明 $(\neg P) \Leftrightarrow (\neg Q)$. 其實這是沒必要的, 不管證明哪一個都需要經過一樣的過程. 例如假設 a, b 為整數, 證明 "ab is even $\Leftrightarrow$ a is even or b is even" 和證明 "ab is odd $\Leftrightarrow$ a and b are odd" 其實是一

樣的. 即使後面那一個看起來比較簡潔, 但是不管證明哪一個, 證明的過程都是一樣的. 反倒是有的同學可能會證明了 $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ 後又去證 $P \Rightarrow Q$. 重複證明了同一件事而不自知, 誤以為證得了兩個方向, 千萬要注意. 所以基本上在證明若且唯若的 statement 時, 最好表明目前在證明哪一個方向. 這樣自己較不會弄錯, 看證明的人也較清楚整個證明過程. 兩全其美, 何樂而不為呢?

數學上也經常會有類似這樣的 statement:

The following are equivalent. (1) P; (2) Q; (3) R.

(有時不只會有 P, Q, R 三項, 可能會有更多項). 這個意思就是說

$$P \Leftrightarrow Q, \quad Q \Leftrightarrow R \quad \text{and} \quad R \Leftrightarrow P.$$

雖是如此, 我們不必"六"個 $\Rightarrow$ 都證. 事實上僅要證明

$$P \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow R \quad \text{and} \quad R \Rightarrow P$$

即可. 這是因為 $Q \Rightarrow P$ 的部分, 可由 $Q \Rightarrow R$ 以及 $R \Rightarrow P$ 得到, 而 $R \Rightarrow Q$ 的部分, 可由 $R \Rightarrow P$ 以及 $P \Rightarrow Q$ 得到. 最後 $P \Rightarrow R$ 的部分, 可由 $P \Rightarrow Q$ 以及 $Q \Rightarrow R$ 得到. 當然了, 有時不一定這個順序好證, 也可考慮倒過來證明

$$R \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow P \quad \text{and} \quad P \Rightarrow R.$$

甚至有時候會發生不管哪一邊都不好證, 例如 $P \Leftrightarrow R$ 兩邊都不好證, 這時證明

$$P \Leftrightarrow Q \quad \text{and} \quad Q \Leftrightarrow R$$

也可. 因為 $P \Rightarrow R$ 的部分, 可由 $P \Rightarrow Q$ 以及 $Q \Rightarrow R$ 得到, 而 $R \Rightarrow P$ 的部分, 可由 $R \Rightarrow Q$ 以及 $Q \Rightarrow P$ 得到. 總之, 在證明這一類的問題, 要注意推導的方向, 確保任兩個 statement 都可通行無阻. 時時標明目前是從哪一個 statement 推導到哪一個 statement, 是必要的.

2.2. Existence and Uniqueness 的證明

Existence 指的是存在性, 而 uniqueness 指的是唯一性. 這兩個性質的探討也經常在數學定理中出現. 要注意, existence 和 uniqueness 是兩個互相獨立的性質. 也就是說存在未必會唯一. 而這裡的唯一指的是若存在則會唯一, 所以證得唯一也未必會存在. 所以這裡, 我們分開討論 existence 和 uniqueness 的證明.

2.2.1. Existence. 有關 existence 的證明方法大致上有兩類. 一類是所謂的 *constructive method* 指的是確實告知存在的是什麼. 另一類是 *nonconstructive method* 指的是利用已知的理論或邏輯的推導得知一定存在, 但未必知道有哪些.

例如證明存在實數 x 滿足 $6x^2 - x - 1 = 0$. 我們可以將 $6x^2 - x - 1$ 分解得 $(2x-1)(3x+1)$ 故明確找出 $x = 1/2$ (或 $x = -1/3$) 這個實數會滿足 $6x^2 - x - 1 = 0$. 這就是一個 construct method. 我們也可考慮多項式函數 $f(x) = 6x^2 - x - 1$, 發現 $f(0) = -1 < 0$ 且 $f(1) = 4 > 0$. 故由多項式函數為連續函數以及連續函數的中間值定理, 證得 $f(x) = 0$ 在 $0 < x < 1$ 之間

必有一根, 而證得了存在性. 這個方法雖證出存在性, 但因無法明確指出哪一個 x 會滿足 $6x^2-x-1=0$, 所以是 nonconstructive method. 我們再看以下的例子.

Example 2.2.1. 證明 there exists irrational numbers a,b such that a^b is rational.

Proof. Constructive Method: 考慮 $a=\sqrt{2}$ 且 $b=\log_2 9$. 我們已知 a 為無理數. 同樣的利用反證法可證明 b 亦為無理數. 事實上若存在 m,n 為整數滿足 $\log_2 3=n/m$. 表示 $2^n=3^m$, 我們知道 3 的任何整數次方都不會是偶數, 得到矛盾. 故知 $b=\log_2 9$ 為無理數. 此時

$$a^b=2^{\frac{1}{2}\log_2 9}=2^{\log_2 3}=3,$$

得證存在無理數 a,b 使得 a^b 為有理數.

Nonconstructive Method: 考慮 $a'=\sqrt{2}$ 且 $b'=\sqrt{2}$. 我們知道 a',b' 為無理數. 令 $c=(a')^{b'}$. 若 c 為有理數, 則 $a=\sqrt{2},b=\sqrt{2}$ 為所求. 而若 c 為無理數, 此時令 $a=c,b=\sqrt{2}$, 則

$$a^b=(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^2=2.$$

得證存在無理數 a,b 使得 a^b 為有理數. □

這裡這個 nonconstructive method 由於沒有證明 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是否為有理數. 因此無法確定 $a=b=\sqrt{2}$ 和 $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}},b=\sqrt{2}$ 中哪一個會是符合存在性的要求, 但確定它們兩個其中有一個會符合, 所以是 nonconstructive method. 事實上只要知道 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是無理數, 令 $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}},b=\sqrt{2}$ 這便是 constructive method. 不過 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是無理數的證明非常困難 (遠遠超過本講義的範圍). 所以我們避開它的證明, 而仍能證明存在性, 這就是 nonconstructive method 的精神.

Question 2.5. 試找到其他的例子或更一般的方法, 利用 *construct method* 證明 *there exists irrational numbers* a,b *such that* a^b *is rational.*

大家可以發現利用 constructive method 得到存在性, 證明的重點並不是在於如何找到這些存在的東西, 而是要確實驗證並說明為何它們符合存在的條件. 例如在證明一個方程式的解存在時, 同學們常常利用等式推導出解的可能值, 而沒有代回驗證是否為解就誤以為證得存在性. 這是同學們常弄錯的, 所以我門特別說明一下. 在求解的推導過程, 往往是假設解存在, 再利用一些等式推導出解的“可能值”. 也就是說, 除非你的推導過程是“雙向”皆成立的, 否則你推出的結果是,「若解存在的話, 則它們可能的值」, 未必這些真的是解 (這再次說明若 P 則 Q 方向性的重要). 這些推出的值只是讓我們縮小要驗證的範圍而已, 此時唯有將這些值代回驗證, 才能確保解的存在. 我們看下面的例子.

Example 2.2.2. 是否存在實數 x 滿足 $\sqrt{3-2x}=x-2$?

若直接假設有解, 則兩邊平方得 $3-2x=x^2-4x+4$, 即 $x^2-2x+1=0$. 得 $x=1$. 這表示若有解, 其解必為 $x=1$. 也就是除了 $x=1$ 可能會是此方程式之解外, 其他實數都不可能是解. 但將 $x=1$ 代回原式, 得 $1=-1$ 不合. 故知不存在實數 x 滿足 $\sqrt{3-2x}=x-2$.