

由 Definition 3.2.1 我們知道“交集”和邏輯的“and”有關，而“聯集”和“or”有關。所以我們很容易推得以下的關係：

- (1) $A \cap B = B \cap A$.
- (2) $A \cup B = B \cup A$.
- (3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- (4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

由於 (3) 的關係，以後多個集合的交集我們便省略括弧不必去強調哪幾個先作交集，例如直接寫成 $A \cap B \cap C$ 。同理由於 (4)，以後多個集合的聯集我們也省略括弧，例如直接寫成 $A \cup B \cup C$ 。

利用邏輯 $\wedge, \vee$ 之間的分配性質，即

$$((P \wedge Q) \vee R) \sim ((P \vee R) \wedge (Q \vee R)), \quad ((P \vee Q) \wedge R) \sim ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R)),$$

我們有以下的性質。

Proposition 3.2.6. 假設 A, B, C 為 sets, 則

$$((A \cap B) \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C), \quad ((A \cup B) \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Proof. 首先由 $(A \cap B) \subseteq A$ 以及 $C \subseteq C$ 利用 Proposition 3.2.3 得 $((A \cap B) \cup C) \subseteq (A \cup C)$ 。同理知 $((A \cap B) \cup C) \subseteq (B \cup C)$ 。再利用 Corollary 3.2.4 得 $((A \cap B) \cup C) \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$ 。另一方面假設 $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ 表示 $x \in A \cup C$ 且 $x \in B \cup C$ 。我們利用 proof in cases, 考慮 $x \in C$ 和 $x \notin C$ 這兩種情況。若 $x \in C$, 則當然 $x \in (A \cap B) \cup C$ 。而若 $x \notin C$, 則由 $x \in A \cup C$ 且 $x \in B \cup C$, 知 $x \in A$ 且 $x \in B$, 亦即 $x \in A \cap B$ 。故此時仍有 $x \in (A \cap B) \cup C$ 。也就是說不管哪種情況, 我們都可以由 $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ 推得 $x \in (A \cap B) \cup C$, 得證 $((A \cup C) \cap (B \cup C)) \subseteq (A \cap B) \cup C$ 。故知 $((A \cap B) \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ 。

至於 $((A \cup B) \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ 的證明, 首先由 $A \subseteq (A \cup B)$ 以及 $C \subseteq C$ 利用 Proposition 3.2.3 得 $(A \cap C) \subseteq ((A \cup B) \cap C)$, 同理我們有 $(B \cap C) \subseteq ((A \cup B) \cap C)$ 。故由 Corollary 3.2.4 知 $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq ((A \cup B) \cap C)$ 。另一方面, 若 $x \in (A \cup B) \cap C$, 表示 $x \in A \cup B$ 且 $x \in C$ 。由 $x \in A \cup B$, 我們知 $x \in A$ 或 $x \in B$ 。當 $x \in A$ 時, 由於已知 $x \in C$, 故得 $x \in A \cap C$ 。此時自然有 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ 。同理, 當 $x \in B$ 時, 可得 $x \in B \cap C$ 。因此也有 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, 得證 $((A \cup B) \cap C) \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$ 。故知 $((A \cup B) \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $\square$

Question 3.9. 試利用 Proposition 3.2.5 中 (1) $\Rightarrow$ (2) 的結果以及 Proposition 3.2.6 證明 Proposition 3.2.5 中 (2) $\Rightarrow$ (3)。

3.2.2. Set Difference. 我們定義何謂 set difference.

Definition 3.2.7. 假設 A, B 為 sets, 定義 $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$, 稱之為 the set difference of B in A (B 在 A 中的差集)。若 X 為 universal set, 則令 $A^c = X \setminus A = \{x : x \notin A\}$ 稱之為 the complement of A (A 的補集)。

注意 A^c 的定義原本應為 $\{x: x \in X \text{ and } x \notin A\}$, 但因 X 為 universal set, 我們知道所有元素皆在 X 中, 故省略 $x \in X$ 直接寫 $x \notin A$. 所以在使用補集時要特別注意是否已明確說明了什麼是字集, 否則會有符號不唯一的問題. 例如若 $\mathbb{Q}$ 為字集, 則 $\mathbb{Q}^c = \emptyset$, 而當字集為 $\mathbb{R}$ 時, $\mathbb{Q}^c$ 就是所有無理數所成的集合了.

利用補集的符號, 依定義我們有 $A \setminus B = A \cap B^c$, 從這裡我們知道一般的情況 $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$ 是不相同的. 事實上我們有 $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$. 這是因為很明顯的 $A \cap A^c = \emptyset$ 且 $B \cap B^c = \emptyset$, 故知

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cap (B \cap A^c) = (A \cap A^c) \cap (B \cap B^c) = \emptyset.$$

Example 3.2.8. 假設 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. 因 $1, 3 \in A$ 且 $1 \notin B$ 且 $3 \notin B$, 知 $1, 3 \in A \setminus B$. 雖然 $2 \in A$ 但是 $2 \in B$, 故 $2 \notin A \setminus B$. 得 $A \setminus B = \{1, 3\}$. 同理可得 $B \setminus A = \{4, 6\}$. 我們有 $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \{1, 3\} \cap \{4, 6\} = \emptyset$. 又 $1, 3, 5 \in X$ 且 $1, 3, 5$ 皆不在 B 中, 故知 $1, 3, 5 \in B^c$. 而 $2, 4, 6 \in B$ 故 $2, 4, 6$ 皆不屬於 B^c , 得 $B^c = \{1, 3, 5\}$. 最後考慮 $A \cap B^c$ 得 $A \cap B^c = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3\} = A \setminus B$.

接下來我們看 set difference 的一些性質, 其實這些性質我們可以用元素的方式證明, 不過在證明時由於常出現否定的問題所以經常要用反證法, 如此反反覆覆, 容易搞混。但如使用補集符號, 就可以化繁為簡。所以我們先介紹有關於補集的一些性質, 再處理差集的問題。

Proposition 3.2.9. 假設 A, B 為 sets, 我們有以下的性質.

- (1) $(A^c)^c = A$.
- (2) $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$.
- (3) $(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c)$.
- (4) $A \subseteq B$ 若且唯若 $B^c \subseteq A^c$.

Proof. 這些性質都可以利用前面邏輯相關的 equivalence 推導. 我們主要使用的方式就是 $x \notin A$ 是 $x \in A$ 的否定, 所以

$$(x \in A^c) \sim (x \notin A) \sim \neg(x \in A).$$

(1) $x \in (A^c)^c$ 表示 $x \notin A^c$, 即 $\neg(x \in A^c)$. 等同於 $\neg(x \notin A)$, 亦即 $\neg(\neg(x \in A))$. 因此由式子 (1.7), 知此與 $x \in A$ 等價, 故得證。

(2) $x \in (A \cap B)^c \sim \neg(x \in (A \cap B)) \sim \neg((x \in A) \wedge (x \in B))$. 由式子 (1.8) 知此與 $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$ 等價, 亦即 $(x \in A^c) \vee (x \in B^c)$, 故得證等同於 $x \in (A^c \cup B^c)$.

(3) $x \in (A \cup B)^c \sim \neg(x \in (A \cup B)) \sim \neg((x \in A) \vee (x \in B))$. 由式子 (1.9) 知此與 $\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$ 等價, 亦即 $(x \in A^c) \wedge (x \in B^c)$, 故得證等同於 $x \in (A^c \cap B^c)$.

(4) 由於 $A \subseteq B$ 等價於 $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$ 且 $B^c \subseteq A^c$ 等價於 $\neg(x \in B) \Rightarrow \neg(x \in A)$. 由式子 (1.11) 我們有 $((x \in A) \Rightarrow (x \in B)) \sim (\neg(x \in B) \Rightarrow \neg(x \in A))$, 故得證。□

利用 Proposition 3.2.9, 我們立即可得以下的定理。

Corollary 3.2.10. 假設 A, B, C 為 *sets*, 我們有以下的性質。

- (1) $(C \setminus (C \setminus A)) = (C \cap A)$.
- (2) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
- (3) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
- (4) 若 $A \subseteq B$ 則 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.

Proof. 我們使用補集、交集、聯集之間的關係證明。

(1) 依定義 $(C \setminus (C \setminus A)) = C \cap (C \setminus A)^c = C \cap (C \cap A^c)^c$. 由 Proposition 3.2.9 (1)(2), $(C \cap A^c)^c = C^c \cup (A^c)^c = C^c \cup A$, 故得 $(C \setminus (C \setminus A)) = C \cap (C^c \cup A)$. 再由分配率

$$C \cap (C^c \cup A) = (C \cap C^c) \cup (C \cap A) = \emptyset \cup (C \cap A)$$

得證 $(C \setminus (C \setminus A)) = (C \cap A)$.

(2) 依定義 $C \setminus (A \cap B) = C \cap (A \cap B)^c$. 由 Proposition 3.2.9 (2), $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$, 故得 $C \setminus (A \cap B) = C \cap (A^c \cup B^c)$. 再由分配率 $C \cap (A^c \cup B^c) = (C \cap A^c) \cup (C \cap B^c)$. 得證 $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

(3) 依定義 $C \setminus (A \cup B) = C \cap (A \cup B)^c$. 由 Proposition 3.2.9 (3), $(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c)$, 故得 $C \setminus (A \cup B) = C \cap (A^c \cap B^c)$. 再由 $C \cap (A^c \cap B^c) = (C \cap A^c) \cap (C \cap B^c)$. 得證 $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

(4) 依定義 $C \setminus B = C \cap B^c$. 現若 $A \subseteq B$ 由 Proposition 3.2.9 (4) 可得 $B^c \subseteq A^c$, 故得 $C \cap B^c \subseteq C \cap A^c$, 得證 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$. $\square$

Corollary 3.2.10 (4) 的反向是不正確的, 不過我們有以下之結果。

Proposition 3.2.11. 假設 A, B, C 為 *sets*. $(C \cap A) \subseteq (C \cap B)$ 若且唯若 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.

特別的, 若已知 $A \subseteq C$, 則 $A \subseteq B$ 若且唯若 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.

Proof. 首先注意 $C \setminus A = C \setminus (C \cap A)$ 這是因為由 Corollary 3.2.10 (2),

$$C \setminus (C \cap A) = (C \setminus C) \cup (C \setminus A) = \emptyset \cup (C \setminus A) = C \setminus A.$$

同理 $C \setminus B = C \setminus (C \cap B)$.

現若 $(C \cap A) \subseteq (C \cap B)$, 利用 Corollary 3.2.10 (4) 可得 $C \setminus (C \cap B) \subseteq C \setminus (C \cap A)$, 得證 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$. 反之, 若 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$, 則同樣由 Corollary 3.2.10 (4) 得 $C \setminus (C \setminus A) \subseteq C \setminus (C \setminus B)$. 再由 Proposition 3.2.10 (1) 得證 $(C \cap A) \subseteq (C \cap B)$.

由 Corollary 3.2.10 (4) 已知若 $A \subseteq B$ 則 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$. 故當已知 $A \subseteq C$, 我們僅要證明: 若 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$ 則 $A \subseteq B$. 此時由前知 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$ 可得 $(C \cap A) \subseteq (C \cap B)$. 故由 $A \subseteq C$ 的假設得 $A = (C \cap A) \subseteq (C \cap B)$. 但 $(C \cap B) \subseteq B$, 故得證 $A \subseteq B$. $\square$

Question 3.10. $C \setminus (B \setminus A)$ 會等於 $(C \setminus B) \setminus A$ 嗎? 試證明 $C \setminus (B \setminus A) = (C \setminus B) \cup (C \cap A)$ 以及 $(C \setminus B) \setminus A = C \setminus (B \cup A)$.

其實這些集合 operations 之間的關係與性質, 都可以直接各邊取一元素, 利用第一章介紹邏輯的 connectives 的性質得到集合包含關係, 最後證得兩邊集合相等. 另一方面我們也可套用這一章中所介紹各集合的 operations 的性質推導. 這兩種方法並無好壞之分, 雖然有時直接套用集合 operations 的性質推導很快速, 但它並非萬能. 在這裡我們並不是鼓勵大家用背誦的方式記憶這麼多的性質, 而是希望大家能夠學習如何利用一些已知的性質推導出新的定理. 最後我們再看一個例子.

Example 3.2.12. 假設 A, B, C 為集合且 $B^c \subseteq A$, 我們要證明 $((C \setminus A) \cup B) = B$.

方法一: 我們用元素的方法處理. 首先已知 $B \subseteq ((C \setminus A) \cup B)$, 故要證明等式成立只要證明 $((C \setminus A) \cup B) \subseteq B$. 現假設 $x \in ((C \setminus A) \cup B)$, 我們要證明 $x \in B$. 然而 $x \in ((C \setminus A) \cup B)$ 表示 $x \in C \setminus A$ 或 $x \in B$. 如果 $x \in B$, 則證明結束, 所以我們僅要討論 $x \in C \setminus A$ 的情形, 即 $x \in C$ 且 $x \notin A$. 因為無法直接證明 $x \in B$, 所以我們可以考慮反證法, 即假設 $x \notin B$ 而得到矛盾. 現若 $x \notin B$, 表示 $x \in B^c$, 故由 $B^c \subseteq A$ 的假設得 $x \in A$. 此與 $x \notin A$ 相矛盾, 故知 $x \in B$. 得證 $((C \setminus A) \cup B) \subseteq B$.

方法二: 我們也可完全用前面證得的性質處理. 首先看到等式左右兩邊都有 B , 所以我們可以利用 Proposition 3.2.5. 也就是說若能證明 $(C \setminus A) \subseteq B$, 則可得證 $((C \setminus A) \cup B) = B$. 如何證明 $(C \setminus A) \subseteq B$ 呢? 由於 $(C \setminus A) \subseteq C$, 利用 Proposition 3.2.11, 我們只要驗證 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus (C \setminus A))$. 然而左邊 $C \setminus B = C \cap B^c$, 右邊 $C \setminus (C \setminus A) = C \cap A$, 所以由 $B^c \subseteq A$ 得證 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus (C \setminus A))$, 因而得 $(C \setminus A) \subseteq B$.