

3.3. Indexed Family

在前一節中，我們談的交集或聯集，是將其視為兩個集合間的 operation. 不過當我們知道交集和聯集有所謂的結合律後，我們便可以談論多個集合的聯集與交集了. 這一節中，我們藉由適當的符號與定義的推廣，將探討任意多個集合的聯集與交集問題. 大致上之前談的兩個集合的交集與聯集的性質，都可以推廣到更一般的情形. 不過處理無限多個集合的情況，有些地方可能和有限的情況稍有不同，要特別留意.

當我們談論有限多個集合的交集和聯集時，如果集合個數不多，例如 5 個集合 A, B, C, D, E 的交集，我們直接用 $A \cap B \cap C \cap D \cap E$ 來表示. 這裡我們都可以不用括弧區分到底哪兩個集合先交集後再和其他的集合做交集，因為交集有結合律. 我們也不必擔心交集的順序，因為交集有交換性. 同樣的對於聯集也是如此. 當集合的個數太多時，像前面這樣一一列出就不切實際了. 遇到這種情形，我們可以把要處理的集合一一編號，例如有 100 個集合，我們就編成 $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ (當然了，這些 A_i 是甚麼應說明清楚). 然後這些集合的交集與聯集我們便像處理加法的 “summation” 符號，將這些集合的交集與聯集分別用 $\bigcap_{i=1}^{100} A_i, \bigcup_{i=1}^{100} A_i$ 來表示. 例如若 $A_i = [i-1, i]$ (即介於 $i-1$ 和 i 之間的實數)，則

$\bigcap_{i=1}^{100} A_i = \emptyset, \bigcup_{i=1}^{100} A_i = [0, 100]$. 如果有無窮多集合怎麼辦？像前面的例子，如果對所有的自然數 $i \in \mathbb{N}$, A_i 皆有定義，我們可以考慮對所有的 A_i 的交集和聯集. 這時候我們一般可以學無窮級數的方法，將這些交集和聯集分別表示成 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. 當然了，這樣的符號底下表示的是 i

從哪一個數開始，上面表示的是到哪一個為止，所以我們要考慮 A_5, A_6, A_7, A_8 的交集和聯集就可以分別用 $\bigcap_{i=5}^8 A_i, \bigcup_{i=5}^8 A_i$ 來表示. 因此一般若要談 i 從 m 到 n 的 A_i 之交集與聯集，我們

便分別用 $\bigcap_{i=m}^n A_i, \bigcup_{i=m}^n A_i$ 來表示. 而要表達所有 i 大於等於 m 的 A_i 之交集與聯集，我們便分別用 $\bigcap_{i=m}^{\infty} A_i, \bigcup_{i=m}^{\infty} A_i$ 來表示. 這裡要注意，很多同學會誤以為 $\bigcap_{i=m}^{\infty} A_i, \bigcup_{i=m}^{\infty} A_i$ 是 $\bigcap_{i=m}^n A_i, \bigcup_{i=m}^n A_i$ 當 n

趨近於 ∞ 的極限. 這個說法是有問題的，因為我們從未定義過 “集合的極限”.

不過這些符號仍不夠我們的需求. 有時我們要探討的集合，它們的個數是不能像整數一樣一個一個數的. 例如實數，就無法一個一個數. 所以若我們談的集合和實數有關，如 $(-r, r)$ 其中 $r > 0$ ，這樣的區間，要如何表達所有這樣的區間的交集與聯集呢？於是乎，我們引進了 index set 的概念. 所謂 index set 就是你要用來 “編足碼” 的東西所成的集合. 例如前面 $A_i = [i-1, i]$ 的例子，我們考慮的 i 是所有的自然數 $\mathbb{N}$ ，所以此時 $\mathbb{N}$ 便是我們的 index set. 而若要探討 $[-r, r]$ 的情形，我們可以用正實數 $\mathbb{R}^+$ 為我們的 index set，將要考慮的區間編碼成 $A_r = [-r, r]$. 這樣將所有被編碼好的集合 $A_r, r \in \mathbb{R}^+$ 收集在一起，便是所謂的 indexed family 了. 所以一般來說，我們要先說好 index set 為何. 接下來要說明要探討的集合如何用 index set 裡的元素編碼，這樣才能形成一個 indexed family. 也就是說若 I 為 index set，我們必須說明 A_i 是甚麼，這樣 $\{A_i, i \in I\}$ 便會是一個 indexed family.

接下來, 我們便是要定義一個 indexed family 裡的集合其交集與聯集. 注意, 即使只有有限個集合, 我們仍可將其視為 indexed family. 例如兩個集合 A, B , 我們仍可將其是為 index set 為 $I = \{1, 2\}$ 的 indexed family, 其中 $A_1 = A, A_2 = B$. 所以我們定義 index family 的交集與聯集需與有限集合的交集與聯集一致. 當我們有兩個集合 A, B 時, 要求交集的元素必須在每一個集合中; 而聯集裡的元素需在 A, B 某一個中. 所以我們有以下的定義.

Definition 3.3.1. 假設 I 為 index set, 而 $\{A_i, i \in I\}$, 為以 I 為 index set 的 indexed family. 定義此 indexed family 的 intersection 為

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i, \forall i \in I\}.$$

定義此 indexed family 的 union 為

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i, \exists i \in I\}.$$

利用此定義, 我們看以下的例子.

Example 3.3.2. 考慮 index set I 為大於 1 的整數. 對任意 $i \in I$, 令 $A_i = \{m/i : m \in \mathbb{Z}\}$. 我們要證明

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \mathbb{Z}, \quad \bigcup_{i \in I} A_i = \mathbb{Q}.$$

首先, 任意 $n \in \mathbb{Z}$, 我們都可以寫成 $n = ni/i$. 由於 $ni \in \mathbb{Z}$, 故得 $n \in A_i, \forall i \in I$. 證得了 $\mathbb{Z} \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$. 另一方面, 若 $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, 表示對任意 $i \in I$ 皆有 $x \in A_i$. 現由於 $x \in A_2$ 以及 $x \in A_3$, 我們有 $x = m/2$ 且 $x = m'/3$, 其中 $m, m' \in \mathbb{Z}$. 然而此即表示 $3m = 2m'$, 故知 $3m$ 必為偶數. 因而得知 m 為偶數 $2n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$. 代回得 $x = m/2 = n \in \mathbb{Z}$. 得證 $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \mathbb{Z}$, 故 $\bigcap_{i \in I} A_i = \mathbb{Z}$.

現若 $x \in \mathbb{Q}$, 依有理數之定義, x 可寫成 m/n , 其中 $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. 現若 $n = 1$, 即 $x = m \in \mathbb{Z}$. 我們可以將 x 寫成 $x = 2m/2$, 知此時 $x \in A_2$. 而若 $n \geq 2$, 表示 $n \in I$, 故此時 $x \in A_n$. 得證 $\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. 另一方面, 若 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, 表示存在 $n \in I$, 使得 $x \in A_n$. 故依定義得 $x = m/n$, 其中 $m \in \mathbb{Z}$. 此即表示 $x \in \mathbb{Q}$, 得證 $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \mathbb{Q}$, 故 $\bigcup_{i \in I} A_i = \mathbb{Q}$.

Question 3.11. 令 A_i 如 Example 3.3.2 所設. 利用當 $m \in \mathbb{Z}$ 時, 若 p, q 為兩互質整數且 p 整除 mq , 則 p 整除 m 之事實, 證明若 p, q 為兩互質整數, 則 $A_p \cap A_q = \mathbb{Z}$. 依此證明當 $m \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{i=m}^{\infty} A_i = \mathbb{Z}$.

現在我們探討一些有關兩集合的交集與聯集的性質, 是否可以推廣到更一般 indexed family 的情形. 首先 Proposition 3.2.3 是可以推廣的.

Proposition 3.3.3. 假設 $\{A_i, i \in I\}, \{B_i, i \in I\}$ 是以 I 為 index set 的兩組 indexed family. 若對於所有 $i \in I$ 皆有 $A_i \subseteq B_i$, 則

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i \quad \text{and} \quad \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Proof. 設 $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, 表示對所有 $i \in I$, 皆有 $x \in A_i$, 故由 $A_i \subseteq B_i$, 得 $x \in B_i$. 因為這是對任意的 $i \in I$ 皆成立, 故得 $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$. 得證 $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$.

現若 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, 表示存在 $i \in I$ 使得 $x \in A_i$, 故由 $A_i \subseteq B_i$, 得 $x \in B_i$. 此即表示 $x \in \bigcup_{i \in I} B_i$, 得證 $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$. $\square$

很容易知道, 若對於任意 $i \in I$, 皆有 $A_i = A$, 則 $\bigcap_{i \in I} A_i = A$ 且 $\bigcup_{i \in I} A_i = A$. 所以我們套用 Proposition 3.3.3 有以下 Corollary 3.2.4 的推廣.

Corollary 3.3.4. 假設 A, B 為 set 且 $\{A_i, i \in I\}, \{B_i, i \in I\}$ 是以 I 為 index set 的 indexed family.

(1) 若對於所有 $i \in I$ 皆有 $A \subseteq A_i$, 則 $A \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$.

(2) 若對於所有 $i \in I$ 皆有 $B_i \subseteq B$, 則 $\bigcup_{i \in I} B_i \subseteq B$.

雖然前面幾個結果顯示一些關於有限多個集合的交集或聯集性質可以推廣到無窮多個集合的交集或聯集, 不過這並不是完全對的. 例如有可能有一些集合當你在它們中任意取有限多個做交集時都不是空集合, 但是取無窮多個做交集時有可能會是空集合. 我們有以下的例子.

Example 3.3.5. 我們要舉例說明有可能一個以自然數 $\mathbb{N}$ 為 index set 的 indexed family $\{A_i, i \in I\}$, 滿足對所有 $n \in \mathbb{N}$ 皆有 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 不是空集合 (甚至會有無窮多個元素), 但 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 是空集合.

事實上對所有 $i \in \mathbb{N}$ 考慮 A_i 為開區間 (i, ∞) . 此時 A_i 滿足 $A_i \neq \emptyset$ 且當 $j \geq i$ 時, $A_j \subseteq A_i$. 因此得 $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_n = (n, \infty) \neq \emptyset$. 但 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$. 這是因為若 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, 則因 $x \in \mathbb{R}$ 必存在 $n \in \mathbb{N}$ 滿足 $n > x$. 我們得 $x \notin A_n = (n, \infty)$. 此與 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 相矛盾, 得證 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$.

從上面這個例子我們知道, 一些在有限多個集合的交集或聯集會對的情形, 在無窮多個集合的時候有可能是錯的, 所以還是要多加留意.

Question 3.12. 假設 A_i 為 Example 3.3.5 中的開區間 (i, ∞) , 為何不是 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\infty\}$?

關於交集與聯集分配律的性質, 我們有以下 Proposition 3.2.6 的推廣.

Proposition 3.3.6. 假設 B 為 set, 且 $\{A_i, i \in I\}$ 是以 I 為 index set 的 indexed family. 則

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B) \quad \text{and} \quad \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B).$$

Proof. 由於對所有 $k \in I$ 皆有 $(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq (A_k \cup B)$ 且 $B \subseteq (A_k \cup B)$, 由 Corollary 3.2.4 (2) 知 $((\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B) \subseteq (A_k \cup B)$. 因為這是對任意 $k \in I$ 皆對, 故由 Corollary 3.3.4 (1) 知

$$((\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B) \subseteq \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B).$$

另一方面, 若 $x \in \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$, 則對所有 $i \in I$, 皆有 $x \in A_i$ 或 $x \in B$. 我們分 $x \in B$ 以及 $x \notin B$ 兩種情況來討論. 若 $x \in B$, 則自然有 $x \in (\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B$. 而若 $x \notin B$, 則知 $x \in A_i$ 且由於這是對所有 $i \in I$ 皆成立, 故得 $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, 因此 $x \in (\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B$. 得證 $\bigcap_{i \in I} (A_i \cup B) \subseteq ((\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B)$, 故

$$(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B).$$

同理, 對所有 $k \in I$ 皆有 $(A_k \cap B) \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i)$ 且 $(A_k \cap B) \subseteq B$, 由 Corollary 3.2.4 (1) 知 $(A_k \cap B) \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B$. 因為這是對任意 $k \in I$ 皆對, 故由 Corollary 3.3.4 (2) 知

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B.$$

另一方面, 若 $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B$, 表示 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ 且 $x \in B$. 因此存在 $i \in I$, 使得 $x \in A_i$ 且 $x \in B$. 亦即存在 $i \in I$ 使得 $x \in A_i \cap B$. 故知此時 $x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$, 得證 $((\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B) \subseteq \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$, 故

$$(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B).$$

□

最後我們推廣有關於有限集合差集的 DeMorgan's laws (Proposition 3.2.9 (2)(3)).

Proposition 3.3.7. 假設 C 為 sets 且 $\{A_i, i \in I\}$ 是以 I 為 index set 的 indexed family, 我們有以下的性質.

- (1) $C \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (C \setminus A_i)$. 特別的, 我們有 $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$.
- (2) $C \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (C \setminus A_i)$. 特別的, 我們有 $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$.

Proof. (1): 我們先證 $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$. 為了方便我們直接用 logical equivalence 來證明。因 $x \in (\bigcap_{i \in I} A_i)^c$ 表示 $x \notin (\bigcap_{i \in I} A_i)$, 亦即 $\neg(x \in \bigcap_{i \in I} A_i)$ 然而 $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ 表示 $\forall i \in I, x \in A_i$, 故 $\neg(x \in \bigcap_{i \in I} A_i)$ 等同於 $\exists i \in I, x \notin A_i$, 即 $\exists i \in I, x \in A_i^c$, 故得證此等同於 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i^c$. 得證 $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$.

現因 $C \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i) = C \cap (\bigcap_{i \in I} A_i)^c = C \cap (\bigcup_{i \in I} A_i^c)$ 由交集和聯集的分配律 (Proposition 3.3.6) 知 $C \cap (\bigcup_{i \in I} A_i^c) = \bigcup_{i \in I} (C \cap A_i^c)$, 故得證

$$C \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (C \setminus A_i).$$

(2): 利用 (1) 的結果我們有 $(\bigcap_{i \in I} A_i^c)^c = \bigcup_{i \in I} (A_i^c)^c$, 再利用 Proposition 3.2.9 (1), 得 $(\bigcap_{i \in I} A_i^c)^c = \bigcup_{i \in I} A_i$. 取 complement 並再次利用 Proposition 3.2.9 (1) 得證 $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$. 現因

$$C \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) = C \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)^c = C \cap (\bigcap_{i \in I} A_i^c) \quad \text{and} \quad \bigcap_{i \in I} (C \setminus A_i) = \bigcap_{i \in I} (C \cap A_i^c),$$

由交集本身的結合律與交換律知 $C \cap (\bigcap_{i \in I} A_i^c) = \bigcap_{i \in I} (C \cap A_i^c)$, 故得證

$$C \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (C \setminus A_i).$$

□

Question 3.13. 假設 C 為 sets 且 $\{A_i, i \in I\}$ 是以 I 為 index set 的 indexed family. 試問 $(\bigcap_{i \in I} A_i) \setminus C$ 會等於 $\bigcap_{i \in I} (A_i \setminus C)$ 或是 $\bigcup_{i \in I} (A_i \setminus C)$, 還是都不對? 而 $(\bigcup_{i \in I} A_i) \setminus C$ 會等於甚麼?

3.4. Power Set and Cartesian Product

前面介紹的幾個集合的運算 (交集, 聯集和差集) 在作用後所得的集合仍在字集中, 接著要介紹的這兩種運算在作用後所得的集合很可能會不在原先的字集中 (當然此時要擴大我們的字集), 這一點要特別留意.

3.4.1. Power Set. 首先我們定義 power set.

Definition 3.4.1. 假設 A 為 set. 我們定義 A 的 power set 為 A 的 subsets 所成的集合, 用 $\mathcal{P}(A)$ 來表示. 依定義我們有

$$\mathcal{P}(A) = \{S : S \subseteq A\}.$$

由於對任意的 set A , 皆有 $\emptyset \subseteq A$ 以及 $A \subseteq A$, 我們得 $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ 且 $A \in \mathcal{P}(A)$. 最特別的是, 因 $\emptyset$ 包含於任何的集合, 故我們仍有 $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$. 也就是我們會同時有 $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ 且 $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$ 的情形發生. 另外若 $a \in A$, 表示 $\{a\} \subseteq A$, 故知 $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$. 原來的 set 和其 power set 中 “屬於” 和 “包含於” 關係的轉變, 千萬不要混淆. 我們看以下的例子.

Example 3.4.2. 由於 $\emptyset$ 只有自己一個子集合, 故得 $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

考慮 $A = \{1, 2, 3\}$, 由前已知 $\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}$ 皆在 $\mathcal{P}(A)$ 中. 又因 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ 皆包含於 A , 故得

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

當一個集合 A 僅有有限多個元素時，我們稱之為 *finite set*. 此時我們用 $\#(A)$ 來表示 A 的元素個數. 例如在上面 Example 3.4.2 中 $\#(A) = 3$, 此時我們發現 $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^3 = 8$. 一般的 *finite set*, 我們都可以由其元素個數, 得到知道它的 *power set* 的元素個數.

Proposition 3.4.3. 假設 A 為 *finite set* 且 $\#(A) = n$. 則 $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.

Proof. 我們可以用排列組合的方法得到 $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^n$. 不過這不是本門課所要談論的技巧, 我們用數學歸納法證明. 我們對 A 的元素個數 $\#(A)$ 做數學歸納法. 當 $\#(A) = 0$ 時, 表示 A 沒有任何元素, 即 $A = \emptyset$. 由 Example 3.4.2, 我們知此時 $\#(A) = 1 = 2^0$. 而當 $\#(A) = 1$ 時, 表示 A 僅有一元素, 設其為 a , 即 $A = \{a\}$. 此時我們有 $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$, 故得 $\#(A) = 2 = 2^1$. 證得 $n = 0, 1$ 時成立.

現假設當集合的個數為 k 時成立. 考慮 $\#(A) = k+1$ 的情形, 假設 $A = \{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$. 此時令 $A' = A \setminus \{a_{k+1}\}$. 我們有 $\#(A') = k$, 故由歸納法之假設得 $\mathcal{P}(A') = 2^k$, 亦即 A' 共有 2^k 個元素. 現因 $A' \subset A$, A' 的 subset 必為 A 的 subset. 故知 $\mathcal{P}(A)$ 至少有 2^k 個元素. 然而 A 中有 subset 是不包含於 A' 的, 就是那些含有 a_{k+1} 的 subset. 若 S 為這樣的 subset, 即 $a_{k+1} \in S$. 此時令 $S' = S \setminus \{a_{k+1}\}$, 則 $S' \subseteq A'$. 反之, 若 $S' \subseteq A'$, 則令 $S = S' \cup \{a_{k+1}\}$, 我們會得到 S 是 A 的 subset, 但不是 A' 的 subset. 換言之, A 的 subset, 要不然就是 A' 的 subset, 要不然就是將某個 A' 的 subset 聯集 $\{a_{k+1}\}$ 而得. 故得 A 的 subset 的個數為 $2^k + 2^k = 2^{k+1}$, 證得 $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{k+1}$. 故由數學歸納法知, 若 $\#(A) = n$, 則 $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^n$. $\square$

接下來我們要談論 *power set* 和原來的 *set* 之間的關係. 由於這些關係仍和集合的包含關係有關, 我們只要能掌握 *power set* 的元素即可. 依 *power set* 的定義, 若 A 為 *set*, 則 $S \in \mathcal{P}(A)$ 若且唯若 $S \subseteq A$. 利用這個看法, 我們可以很容易地得到一些有關 *power set* 的性質. 首先我們來看, *power set* 事實上是會保持包含關係的.

Proposition 3.4.4. 假設 A, B 為 *sets*. 則 $A \subseteq B$ 若且唯若 $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Proof. $(\Rightarrow)$: 假設 $A \subseteq B$. 若 $S \in \mathcal{P}(A)$, 表示 $S \subseteq A$. 故由 $A \subseteq B$ 得 $S \subseteq B$, 亦即 $S \in \mathcal{P}(B)$. 得證 $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

$(\Leftarrow)$: 假設 $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. 由於 $A \in \mathcal{P}(A)$, 故由 $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, 得 $A \in \mathcal{P}(B)$. 依 *power set* 之定義, 此即表示 $A \subseteq B$. $\square$

Question 3.14. 假設 A, B 為 *sets*. 試問 $A \subset B$ 若且唯若 $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ 是否正確?

Power set 也保持交集的運算, 也就是說我們有以下的性質.

Proposition 3.4.5. 假設 A, B 為 *sets*. 則 $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Proof. 因 $(A \cap B) \subseteq A$ 且 $(A \cap B) \subseteq B$ 由 Proposition 3.4.4 我們有 $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A)$ 且 $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(B)$. 故由 Corollary 3.2.4 知 $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

另一方面, 若 $S \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ 表示 $S \in \mathcal{P}(A)$ 且 $S \in \mathcal{P}(B)$, 亦即 $S \subseteq A$ 且 $S \subseteq B$. 故再由 Corollary 3.2.4 知 $S \subseteq (A \cap B)$, 也就是說 $S \in \mathcal{P}(A \cap B)$. 得證 $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$, 故 $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. $\square$

Question 3.15. 假設 $\{A_i, i \in I\}$ 是以 I 為 *index set* 的 *indexed family*. 試問 $\mathcal{P}(\bigcap_{i \in I} A_i)$ 是否等於 $\bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(A_i)$?

Power set 是否會保持聯集呢? 雖然我們有 $A \subseteq (A \cup B)$ 且 $B \subseteq (A \cup B)$ 所以由 Proposition 3.4.4 可得 $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ 且 $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, 再由 Corollary 3.2.4 得

$$(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B). \quad (3.3)$$

不過一般來說 $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ 卻是不正確的. 這是因為若 $S \in \mathcal{P}(A \cup B)$ 表示 $S \subseteq (A \cup B)$, 但這並不一定保證 $S \subseteq A$ 或 $S \subseteq B$. 例如當 $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, 我們有 $S = \{1, 2\} \subseteq A \cup B$, 但 $S \not\subseteq A$ 且 $S \not\subseteq B$. 事實上此時 $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$, 故有 $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. 但是 $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. 故此時 $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, 即 $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

Question 3.16. 假設 $\{A_i, i \in I\}$ 是以 I 為 *index set* 的 *indexed family*. 試問 $\bigcup_{i \in I} \mathcal{P}(A_i) \subseteq \mathcal{P}(\bigcup_{i \in I} A_i)$ 是否成立?

Question 3.17. 試證明 $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$ 若且唯若 $A \not\subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$.

在任何情況之下, Power set 都無法保持差集. 這是因為當 A, B 為 sets 時, 在任何情況之下皆有 $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $\emptyset \in \mathcal{P}(B)$. 因此會得到 $\emptyset \notin \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$. 然而 $\emptyset \in \mathcal{P}(A \setminus B)$, 故知 $(\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \neq \mathcal{P}(A \setminus B)$. 不過當 $S \neq \emptyset$ 時, 若 $S \in \mathcal{P}(A \setminus B)$, 表示 $S \subseteq (A \setminus B)$. 此時因 $(A \setminus B) \subseteq A$, 故得 $S \subseteq A$ (即 $S \in \mathcal{P}(A)$). 這時我們也會有 $S \not\subseteq B$ (即 $S \notin \mathcal{P}(B)$). 否則由 $S \subseteq (A \setminus B)$ 以及 $S \subseteq B$, 得 $S \subseteq (A \setminus B) \cap B = \emptyset$ 此與 $S \neq \emptyset$ 相矛盾. 故由 $S \in \mathcal{P}(A)$ 且 $S \notin \mathcal{P}(B)$ 得 $S \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$. 我們證明了 $\mathcal{P}(A \setminus B)$ 中除了空集合以外, 其他的元素都會在 $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ 中, 故得

$$(\mathcal{P}(A \setminus B) \setminus \{\emptyset\}) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)). \quad (3.4)$$

不過上面的包含關係的反向並不成立. 因為若 $S \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ 表示 $S \subseteq A$ 且 $S \not\subseteq B$. 但這不表示 $S \subseteq (A \setminus B)$. 例如若 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2\}$, 此時考慮 $S = \{1, 2\}$. 則 $S \subseteq A$ 且 $S \not\subseteq B$ (即 $S \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$), 但 $S = \{1, 2\} \not\subseteq (A \setminus B) = \{1\}$. (即 $S \notin \mathcal{P}(A \setminus B) \setminus \{\emptyset\}$). 故此時 $(\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \not\subseteq (\mathcal{P}(A \setminus B) \setminus \{\emptyset\})$.

Question 3.18. 假設 A, B 為 sets.

- (1) 證明若 $A \setminus B = \emptyset$ 則 $(\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) = \emptyset$.
- (2) 證明若 $A \cap B = \emptyset$ 則 $(\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) = (\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\})$.
- (3) 證明 $(\mathcal{P}(A \setminus B) \setminus \{\emptyset\}) \neq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B))$ 若且唯若 $A \setminus B \neq \emptyset$ 且 $A \cap B \neq \emptyset$